应用理论

炭黑填充天然橡胶超弹性本构方程的适用性分析

王新宇,岳冬梅,杨海波*,张立群

(北京化工大学 有机无机复合材料国家重点试验室,北京 100029)

摘要:为分析复杂应力条件下超弹性本构方程的适用性,以炭黑填充天然橡胶(NR)的短粗三点弯曲压缩试样(简称 三点弯曲试样)作为研究对象,采用Abaqus有限元软件建立与试验过程相符的有限元模型,分析在有/无永久变形条件下 试样力与位移的关系,并与试验数据进行对比,判断不同本构方程的计算精度。结果表明:在同时输入材料单轴拉伸、平 面拉伸以及等双轴拉伸试验应力-应变数据时,不同本构方程对在有/无永久变形条件下三点弯曲试样力的计算精度不 同;Arruda Boyce、Marlow、一至二阶Polynomial、一至三阶Ogden和一至二阶Reduced polynomial方程对有永久变形试 样的计算精度高于无永久变形试样的计算精度;Van Der Waals、四至六阶Ogden和三至六阶Reduced Polynomial方程在 大位移下有永久变形试样的计算精度低于无永久变形试样的计算精度。

关键词:本构方程;超弹性;天然橡胶;永久变形;计算精度;有限元分析 中图分类号:TQ330.1⁺2;O242.82 文章编号:100



在提高橡胶制品研发质量、缩短研发周期方 面,有限元技术发挥着越来越重要的作用。国内 外学者对于超弹性本构方程已有一些研究[1-4], 并开发出不同混合本构模型[5-7]或新构造本构模 型^[8],然而在工程应用中其适用性和准确性还有待 验证;同时轮胎和输送带等橡胶制品经常在复杂 的受力环境中使用,因此研究本构方程对处于复 杂受力状态下的橡胶制品的准确计算至关重要。 需要指出的是,填料填充橡胶在连续循环载荷作 用下,由于内部弱键链段的缠结或断裂,以及填料 颗粒与橡胶基体之间发生弱键分离,导致橡胶产 生应力软化[9-10]以及永久变形[11-13]。在以往的研 究中,研究者们较少关注在永久变形条件下橡胶 制品力学性能的仿真建模,故系统地研究不同本 构方程对在有/无永久变形条件下橡胶制品力学 性能计算精度的影响非常必要。

文献标志码:A

本工作以炭黑填充天然橡胶(NR)制成的短 粗三点弯曲压缩试样(以下简称三点弯曲试样)作 为研究对象,采用Abagus有限元软件建立与试验 文章编号:1000-890X(2021)07-0491-07 DOI:10.12136/j.issn.1000-890X.2021.07.0491

OSID开放科学标识码 (扫码与作者交流)

过程相符的有限元模型,分析在有/无永久变形条件下试样作用力与位移的关系,并与试验数据进行对比,判断不同本构方程的计算精度,为工程应用橡胶材料选择合适的本构方程提供参考。

1 实验

1.1 试验配方

NR(RSS1) 100,氧化锌 3,硬脂酸 1,炭 黑N234 40,促进剂CBS 1.5,硫黄 1。

1.2 试样制备

使用哈克密炼机将塑炼NR捏合均匀,然后依 次加入氧化锌、硬脂酸和炭黑,混炼均匀后取出; 密炼胶置于开炼机上加入促进剂和硫黄,混炼均 匀后下片;混炼胶停放24 h后使用平板硫化机硫化 (143 ℃×9 min)。

1.3 单轴拉伸和平面拉伸及等双轴拉伸试验

使用中国台湾高铁检测仪器有限公司生产的 拉力试验机对单轴拉伸和平面拉伸试样(2 mm厚) 进行10次加载-卸载试验,以消除试样的Mullins效

作者简介:王新宇(1995一),男,山东烟台人,北京化工大学硕士研究生,主要从事材料工程方面的研究。

*通信联系人(yanghb@mail.buct.edu.cn)

引用本文:王新宇,岳冬梅,杨海波,等.炭黑填充天然橡胶超弹性本构方程的适用性分析[J].橡胶工业,2021,68(7):491-497.

Citation: WANG Xinyu, YUE Dongmei, YANG Haibo, et al. Applicability analysis of superelastic constitutive equation of carbon black filled NR[J]. China Rubber Industry, 2021, 68 (7):491-497.

应,并得到稳定的加载曲线,取最后一次加载的应 力-应变数据。等双轴拉伸试验数据采用上述类 似方法测试^[14]。在进行有限元分析时同时输入以 上3种基础试验数据能够确保更精确的力学性能 计算精度^[15]。力学性能计算精度(*ζ*)的计算公式为

$$\zeta = \left(1 - \frac{|C - T|}{T}\right) \times 100\% \tag{1}$$

式中,C和T分别为计算值和测试值。

1.4 三点弯曲试样压缩试验

三点弯曲试样压缩试验如图1所示,试样尺寸 为200 cm×20 cm×30 cm,工作尺寸为70 cm×20 cm×30 cm。试验采用拉力试验机,模具为自制 专用测试模具。测试时夹具固定,夹具两端夹紧 试样,采用位移加载方式对试样进行加载-卸载10 次,以消除试样的Mullions效应,直至得到稳定的 力-位移曲线,取最后一次加载的力-位移数据。 为保证试验数据的准确性,重复试验5次,测试曲 线都高度重合,并在竖直方向产生1.1 mm的永久 位移。



图1 三点弯曲试样压缩试验 Fig. 1 Compression test of three point bending sample

2 有限元模型

2.1 几何模型

在有/无永久变形条件下三点弯曲试样的几 何模型如图2所示。模型建立过程真实还原试验 过程,试样两端上下表面建为刚性面来模拟夹具 的夹持端面,采用绑定接触方式将刚性面与试样 完全固定;建立弯头刚性体模拟试验压头,弯头设 置沿Y轴负方向的14 mm位移载荷。原始(无永久 变形)试样模型包含6 900个单元、8 272个节点,单 元类型为C3D8H杂交单元;有永久变形试样模型 包含8 250个单元、9 856个节点,其中C3D8H单元 为5 250个、C3D8R单元为3 000个。在有限元模拟 过程中,计算三点弯曲试样竖直向下压缩14 mm过





程中参考点的作用力,得到力-位移曲线。

2.2 本构方程

超弹性材料的本构关系是用应变势能来描述 的,它定义了材料中某一点单位参考体积存储的 应变能作为该点的应变函数,经过系列求导过程 得到本构方程。在Abaqus软件中自带六大类可用 于近似不可压缩材料的超弹性本构方程:Arruda Boyce, Marlow和Van Der Waals方程,一至二阶 Polynomial方程,一至六阶Ogden方程,一至六阶 Reduced Polynomial方程,共17种本构方程。

3 结果与讨论

3.1 力的计算误差分析

17种橡胶材料超弹性本构方程对在有/无永 久变形下三点弯曲试样力的计算误差如图3—19 所示。

由图 3—19可见, Arruda Boyce, Marlow和 Polynomial方程对三点弯曲试样力的计算误差随 着位移的增大逐渐减小,且以有永久变形试样作 为建模对象的计算误差小于以无永久变形试样作 为建模对象的计算误差,尤其是二阶Polynomial 方程在位移最大值的计算误差仅为0.08%,即计 算精度达到99.92%,其在位移小于5 mm时计算误 差大于10%,在位移为5~9 mm范围内计算误差大 于5%,在位移大于9 mm时计算误差小于5%。Van Der Waals方程在位移超过2.8 mm临界点后,以有 永久变形试样作为建模对象的计算误差大于以无



图3 Arruda Boyce方程对三点弯曲试样力的计算误差 Fig. 3 Force calculation errors of Arruda Boyce equation for three point bending samples







图5 Van Der Waals方程对三点弯曲试样力的计算误差 Fig. 5 Force calculation errors of Van Der Waals equation for three point bending samples

永久变形试样作为建模对象的计算误差,整体计 算误差小于20%。一至三阶Ogden方程对三点弯 曲试样力的计算误差随着位移的增大逐渐减小,



图6 一阶Polynomial方程对三点弯曲试样力的计算误差 Fig. 6 Force calculation errors of Polynomial first order equation for three point bending samples



图7 二阶Polynomial方程对三点弯曲试样力的计算误差 Fig. 7 Force calculation errors of Polynomial second order equation for three point bending samples



图8 一阶Ogden方程对三点弯曲试样力的计算误差 Fig. 8 Force calculation errors of Ogden first order equation for three point bending samples

且以有永久变形试样作为建模对象的计算误差小 于以无永久变形试样作为建模对象的计算误差, 尤其是三阶Ogden方程在最大位移时的计算误差



图9 二阶Ogden方程对三点弯曲试样力的计算误差 Fig. 9 Force calculation errors of Ogden second order equation for three point bending samples



图10 三阶Ogden方程对三点弯曲试样力的计算误差 Fig. 10 Force calculation errors of Ogden third order equation for three point bending samples





仅为0.73%,即计算精度达到99.27%,其在位移小于6 mm时计算误差大于10%,在位移为6~9 mm 范围内计算误差大于5%,在位移大于9 mm时计算



图12 五阶Ogden方程对三点弯曲试样力的计算误差 Fig. 12 Force calculation errors of Ogden fifth order equation for three point bending samples



图13 六阶Ogden方程对三点弯曲试样力的计算误差 Fig. 13 Force calculation errors of Ogden sixth order equation for three point bending samples



图14 一阶Reduced Polynomial方程对三点弯曲 试样力的计算误差

Fig. 14 Force calculation errors of Reduced Polynomial first order equation for three point bending samples

误差小于5%;四至六阶Ogden方程在位移分别超过8.3,5.7和5.0 mm临界点后,以无永久变形试样



图15 二阶Reduced Polynomial方程对三点弯曲 试样力的计算误差







Fig. 16 Force calculation errors of Reduced Polynomial third order equation for three point bending samples



图17 四阶Reduced Polynomial方程对三点弯曲 试样力的计算误差





图18 五阶Reduced Polynomial方程对三点弯曲 试样力的计算误差

Fig. 18 Force calculation errors of Reduced Polynomial fifth order equation for three point bending samples



图19 六阶Reduced Polynomial方程对三点弯曲 试样力的计算误差

Fig. 19 Force calculation errors of Reduced Polynomial sixth order equation for three point bending samples

作为建模对象的计算误差小于以有永久变形试 样作为建模对象的计算误差,并且随着阶数的增 大,临界点位移逐渐减小,四阶Ogden方程在位移 大于9 mm时计算误差小于1%,具有非常高的计 算精度。一至二阶Reduced Polynomial方程对三 点弯曲试样力的计算误差随着位移的增大逐渐减 小,且以有永久变形试样作为建模对象的计算误 差,三至六阶Reduced Polynomial方程在位移分 别超过7.6,4.7,3.2和2.5 mm临界点后,以无永 久变形试样作为建模对象的计算误差小于以无永 久变形试样作为建模对象的计算误差,并且随着 阶数的增大,临界点位移逐渐减小,三阶Reduced Polynomial方程在位移大于8 mm时计算误差小于 1%,具有非常高的计算精度。

3.2 有限元分析结果

三点弯曲试样压缩14 mm的有限元分析结果 如图20所示。

由图20(a)可见,试样中心处向下位移14 mm, 试样位移由中间向两边依次减小。图20(b)-(d)分别示出沿X轴的拉伸应变(NE11)、沿Y轴的 压缩应变(NE22)以及在YZ平面沿Y轴的剪应变 (NE12),应变和应力结果表明了试样复杂的受力 状态,与试验预期相符合。

4 结论

随着橡胶制品的使用环境越来越复杂,对其 受力计算精度的要求也越来越高。本工作选用炭 黑填充NR制成三点弯曲试样,在复杂的受力状态 下采用不同本构方程对有/无永久变形试样进行 建模和有限元分析,结果表明:对于无永久变形试 样,四阶Ogden和三阶Reduced Polynomial方程在 大位移下有非常高的计算精度;对于有永久变形 试样,三阶Ogden和二阶Polynomial方程在大位移 下有非常高的计算精度。

在工程应用中,一般要求模型的计算误差控 制在10%以内,即计算精度达到90%以上能够满足 设计需要,本工作模型的计算精度完全满足应用 条件。此外,本工作模型基于超弹性本构方程,橡 胶制品在使用过程中的粘弹性等影响因素在一定 程度上会对其计算结果产生影响。

在使用有限元软件对橡胶制品力学性能进行 有限元计算时,惯性思维使人们直接采用试样原 始尺寸进行建模,但是由于橡胶材料在重复使用 中会发生永久变形的特殊性质,对产生永久变形 试样进行建模同样重要。

参考文献:

[1] 雍占福,王瑞华,王文峰.基于ABAQUS炭黑填充三元乙丙橡胶 超弹性本构模型的分析与比较[J].青岛科技大学学报(自然科学 版),2018,39(1):80-83,89.

YONG Z F, WANG R H, WANG W F. Comparison and analysis of rubber hyperelastic constitutive model based on ABAQUS[J]. Journal of Qingdao University of Science and Technology (Natural Science Edition), 2018, 39 (1): 80–83, 89.

[2] KIM B, LEE S B, LEE J, et al. A comparison among Neo-Hookean model, Mooney-Rivlin model, and Ogden model for chloroprene rubber[J]. International Journal of Precision Engineering and





[3] 王国权,刘萌,姚艳春,等.不同本构模型对橡胶制品有限元法适应 性研究[J].力学与实践,2013,35(4):40-47.

WANG G Q, LIU M, YAO Y C, et al. Application of different constitutive models in the nonlinear finite element method for rubber

parts[J]. Mechanics in Engineering, 2013, 35(4): 40-47.

- [4] SHOKOOHI S, NADERI G, KHARAZMKIA M. Hyperelastic model analysis of stress-strain behavior in polybutadiene/ethylene– propylene diene terpolymer nanocomposites[J]. Journal of Vinyl and Additive Technology, 2017, 23 (1) :21–27.
- [5] ZHAO Z, MU X, DU F. Modeling and verification of a new hyperelastic model for rubber-like materials[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2019 (13):1-10.
- [6] 梁星宇,周木英.橡胶工业手册(修订版) 第三分册 配方与基本工 艺[M].北京:化学工业出版社,1989.
- [7] LI Z, WANG Y, LI X. Experimental investigation and constitutive modeling of uncured carbon black filled rubber at different strain rates[J]. Polymer Testing, 2019, 75:117–126.
- [8] WEI Y, YIN Z, GU Z, et al. Constitutive equation for description of stress-strain behaviors of rubber in the whole strain range[J]. Polymeric Materials Science and Engineering, 2018, 34 (3) :81–86.
- [9] MULLINS L, TOBIN N R. Theoretical model for the elastic behavior of filler-reinforced vulcanized rubbers[J]. Rubber Chemistry and Technology, 1957, 30 (2):555-571.
- [10] TOMITA Y, AZUMA K, NAITO M. Strain rate dependent microto macroscopic deformation behavior of carbon-black filled rubber under monotonic and cyclic straining[J]. Key Engineering

Materials, 2007, 345-346 (Pt1):53-56.

- [11] DORFMANN A, OGDEN R W. A constitutive model for the Mullins effect with permanent set in particle-reinforced rubber[J]. International Journal of Solids and Structures, 2004, 41 (7) : 1855– 1878.
- [12] BUECHE F. Mullins effect and rubber-filler interaction[J]. Rubber Chemistry and Technology, 1962, 35 (2):259–273.
- [13] LION A. A constitutive model for carbon black filled rubber: Experimental investigations and mathematical representation[J]. Continuum Mechanics and Thermodynamics, 1996, 8 (3) : 153–169.
- [14] LI X B, WEI Y T. Classic strain energy functions and constitutive tests of rubber–like materials[J]. Rubber Chemistry and Technology, 2015, 88 (4):604–627.
- [15] 杨海波,刘枫,李凡珠,等.圆柱形橡胶试样压缩变形有限元分析 的超弹性本构方程对比研究[J].橡胶工业,2018,65(10):1085-1093.

YANG H B, LIU F, LI F Z, et al. Finite element analysis of compressive deformation for cylindrical rubber components based on hyperelastic constitutive models[J]. China Rubber Industry, 2018,65(10):1085–1093.

收稿日期:2021-01-14

Applicability Analysis of Superelastic Constitutive Equation of Carbon Black Filled NR

WANG Xinyu, YUE Dongmei, YANG Haibo, ZHANG Liqun (Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China)

Abstract: In order to analyze the applicability of the hyperelastic constitutive equations under complex stress conditions, a short and thick three point bending compression specimen of carbon black filled natural rubber (NR) (referred to as three point bending sample) was used as the research object, the finite element model consistent with the test process was established by using Abaqus finite element software, the relationship between the force and displacement of the samples with or without permanent deformation was analyzed, and the calculation accuracy of different constitutive equations was evaluated by comparing with the experimental data. The results showed that when the experimental stress–strain data of uniaxial tensile,

planar tensile and equibiaxial tensile were simultaneously input, the calculation accuracy of the three point bending samples with or without the permanent deformation obtained by various constitutive equations was different. The calculation accuracy of Arruda Boyce, Marlow, first to second order Polynomial, first to third order Ogden and first to second order Reduced Polynomial equations for samples with permanent deformation was higher than that without permanent deformation, and the calculation accuracy of Van Der Waals, fourth to sixth order Ogden and third to sixth order Reduced Polynomial equations for samples with permanent deformation under large displacement was lower than that without permanent deformation.

Key words: constitutive equation; superelastic; NR; permanent deformation; calculation accuracy; finite element analysis