弹性体材料应变率相关力学行为模型

段宇星，杨　强，赵苗苗，苏　渤
（中国飞机强度研究所，陕西 西安　710065）

摘要：研究弹性体材料应变率相关力学行为模型。对弹性体材料在单轴拉伸情况下进行受力分析，得到应力与应变能之间的关系，并在热力学分析的基础上研究材料的内禀时间变量。将内禀时间变量与广义maxwell模型相结合得到表达弹性体材料粘性的模型，并将此模型与Mooney-Rivlin超弹性模型结合建立弹性体材料应变率相关力学行为模型。分析表明，模型中的各项参数与物理事实相符，该模型在减震和缓冲领域具有工程应用价值。

关键词：弹性体材料；广义Maxwell模型；应变率；内禀时间；超弹性
中图分类号：TQ330.1+2　　**文章编号**：1000-890X(2020)12-0899-05
文献标志码：A　　**DOI**：10.12136/j.issn.1000-890X.2020.12.0899

橡胶和塑料等高分子弹性体材料以其特殊的力学性质被广泛应用于减震和缓冲领域。人们通常会在设备重要部位安装弹性体材料缓冲装置，当设备遭受爆炸等冲击振动载荷时，通过弹性体材料的变形将冲击能量转化为势能并以其他能量形式逐渐释放，从而起到保护设备的作用。在振动和冲击等高应变率受力环境下材料的力学行为与普通环境下有显著的区别。

弹性体材料应变率相关力学行为模型一直是国内外的研究热点。B. Song等[1]使用分离式Hopkinson压杆测定了三元乙丙橡胶（EPDM）材料在不同应变率下的应力-应变曲线，并基于应变能函数理论建立了EPDM材料的动态本构关系，较为准确地描述了EPDM材料在宽应变率范围内的力学行为。Z. Li等[2-3]使用非接触式光学测量技术测量了不同应变率下炭黑填充橡胶的拉伸性能，并提出了一个包括超弹性和粘弹性的力学模型以对其进行表征。

本工作在热力学分析的基础上建立基于内禀时间变量的材料力学行为模型，并对模型参数进行分析与研究，为弹性体材料在航空航天的减震和缓冲领域的工程应用奠定基础。

基金项目：航空科学基金资助项目（2017ZF23）
作者简介：段宇星（1987—），男，陕西白水人，中国飞机强度研究所工程师，硕士，主要从事导航设备振动控制的研究工作。
E-mail：yuhsing@163.com

1　力学行为模型

1.1　单轴拉伸应力分析

对于单轴拉伸试验，材料是在一个方向上处于应力（σ）拉伸状态（即$\sigma_{11}=\sigma$），而另外两个方向处于自由状态（$\sigma_{22}=\sigma_{33}=0$）。假定材料为不可压缩材料，则变形梯度张量（$\boldsymbol{F}$）及Cauchy-Green左应变张量（$\boldsymbol{B}$）和右应变张量（$\boldsymbol{C}$）有：

$$\begin{cases} \boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda^{-1/2} & 0\\ 0 & 0 & \lambda^{-1/2}\end{bmatrix} \\ \boldsymbol{B}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\lambda^{2} & 0 & 0\\ 0 & \lambda^{-1} & 0\\ 0 & 0 & \lambda^{-1}\end{bmatrix}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}=\boldsymbol{C}\end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} I_1=\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})=\lambda^2+2\lambda^{-1} \\ I_2=\dfrac{1}{2}[I_1^2-\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}^2)]=2\lambda+\lambda^{-2} \\ I_3=\det(\boldsymbol{B})=1\end{cases} \tag{2}$$

式中，λ为伸长率，I_i为第i应变不变量。

R. S. Rivlin等[4]认为，应力张量（$\boldsymbol{\sigma}$）是应变能（W）函数对$\boldsymbol{B}$的微分，即

$$\boldsymbol{\sigma}=2I_3^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{B}\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{B}}=2I_3^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{B}\left(\frac{\partial W}{\partial I_1}\frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{B}}+\frac{\partial W}{\partial I_2}\frac{\partial I_2}{\partial \boldsymbol{B}}+\frac{\partial W}{\partial I_3}\frac{\partial I_3}{\partial \boldsymbol{B}}\right) \tag{3}$$

而I_i对$\boldsymbol{B}$的导数为

$$\frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{B}}=\boldsymbol{I}$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial \boldsymbol{B}}=I_1\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}$$

$$\frac{\partial I_3}{\partial \boldsymbol{B}}=I_2\boldsymbol{I}-I_1\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^2$$

式中，$\boldsymbol{I}$为应变不变量。

代入式(3)中，则有：

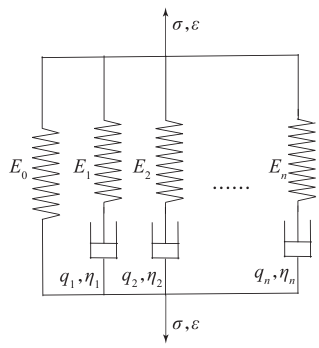
$$\boldsymbol{\sigma}=-p\boldsymbol{I}+2(\frac{\partial W}{\partial I_1}+I_1\frac{\partial W}{\partial I_2})\boldsymbol{B}-2\frac{\partial W}{\partial I_3}\boldsymbol{B}^2 \quad (4)$$

式中，p为静水压力。

1.2 广义Maxwell模型

内禀时间理论是由K. C. Valanis[5]提出的一种描述耗散材料本构关系的理论。该理论认为材料的受力特性和内部结构变化可以采用一个被称为广义时间或者内禀时间(τ)的基本变量来表示，材料的应力状态取决于变形和温度对τ的泛函。

广义Maxwell模型如图1所示。



ε为总应变，E_r为弹簧弹性能，q_r和η_r分别为粘壶的应变和粘性因数。

图1 广义Maxwell模型

图1所示模型存储在弹簧中的W和σ可以描述为

$$W=\frac{1}{2}E_0\varepsilon^2+\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{2}E_r(\varepsilon-q_r)^2 \quad (5)$$

$$\sigma=E_0\varepsilon+\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{2}E_r(\varepsilon-q_r) \quad (6)$$

在恒温等温场中，材料耗散的自由能为阻尼元件上耗散的能量，则有：

$$\frac{\partial W}{\partial q_r}+\eta_r\frac{\mathrm{d}q_r}{\mathrm{d}\tau}=0 \quad (7)$$

同样地，将式(5)代入式(7)中，则有：

$$\eta_r\frac{\mathrm{d}q_r}{\mathrm{d}\tau}+E_rq_r-E_r\varepsilon=0 \quad (8)$$

对式(8)进行Laplace变换，则有：

$$\bar{q}_r(s)=\frac{E_r}{\eta_rs+E_r}\bar{\varepsilon}(s)=(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\Xi_r})s\bar{\varepsilon}(s) \quad (9)$$

式中，s为Laplace算子，$\bar{q}$和$\bar{\varepsilon}$分别为Laplace变换后粘壶的应变和总应变，$\Xi_r=E_r/\eta_r$。

分别令：

$$F_1(s)=\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\Xi_r}\right]$$

$$F_2(s)=s\bar{\varepsilon}(s)$$

对上两式作Laplace逆变换，则有：

$$\mathcal{L}^{-1}[F_1(s)]=1-\exp(-\Xi_r\tau)$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F_2(s)]=\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\tau}$$

计算式(9)，则有：

$$q_r(\tau)=\mathcal{L}^{-1}[F_1(s)]\otimes\mathcal{L}^{-1}[F_2(s)]=$$
$$\int_0^{\tau}\{1-\exp[-\Xi_r(\tau-\tau')]\}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau'}\mathrm{d}\tau' \quad (10)$$

将上式代入式(6)中，则有：

$$\sigma(\tau)=E_0\varepsilon+\sum_{r=1}^{n}\int_0^{\tau}\exp[-\Xi_r(\tau-\tau')]\frac{\partial E_r\varepsilon}{\partial\tau'}\mathrm{d}\tau' \quad (11)$$

根据Boltzmann叠加原理理解，材料的应力响应行为可分为弹性应力响应和粘性应力响应[6]，则有：

$$\sigma(\tau)=\sigma_{\mathrm{H}}+\sigma_{\mathrm{V}}(\tau)$$

式中，σ_{H}为弹性应力响应，σ_{V}为粘性应力响应。结合式(2)与式(11)，则有：

$$\sigma_{\mathrm{H}}=E_0\varepsilon=-p_{\mathrm{H}}\boldsymbol{I}+2(\frac{\partial W_{\mathrm{H}}}{\partial I_1}-I_1\frac{\partial W_{\mathrm{H}}}{\partial I_2})\boldsymbol{B}-2\frac{\partial W_{\mathrm{H}}}{\partial I_2}\boldsymbol{B}^2 \quad (12)$$

$$\sigma_{\mathrm{V}}(\tau)=\sum_{r=1}^{n}\int_0^{\tau}\exp[-\Xi_r(\tau-\tau')]\frac{\partial E_r\varepsilon}{\partial\tau'}\mathrm{d}\tau'=$$
$$-p_{\mathrm{V}}I+\sum_{r=1}^{n}\int_0^{\tau}\exp[-\Xi_r(\tau-\tau')]\frac{\partial}{\partial\tau'}\Big[2\frac{\partial W_{\mathrm{V}}}{\partial I_1}+$$
$$I_1\frac{\partial W_{\mathrm{V}}}{\partial I_2})\boldsymbol{B}-2\frac{\partial W_{\mathrm{V}}}{\partial I_2}\boldsymbol{B}^2\Big]\mathrm{d}\tau' \quad (13)$$

针对单轴拉伸试验状态，将式(1)和(4)代入式(12)中，则弹性应力响应有：

$$\sigma_{11\mathrm{H}}=-p_{\mathrm{H}}+2\lambda^2(\frac{\partial W_{\mathrm{H}}}{\partial I_1}+I_1\frac{\partial W_{\mathrm{H}}}{\partial I_2})-2\lambda^4\frac{\partial W_{\mathrm{H}}}{\partial I_2}$$

$$\sigma_{22\mathrm{H}}=-p_{\mathrm{H}}+2\lambda^{-1}(\frac{\partial W_{\mathrm{H}}}{\partial I_1}+I_1\frac{\partial W_{\mathrm{H}}}{\partial I_2})-2\lambda^{-2}\frac{\partial W_{\mathrm{H}}}{\partial I_2}=0$$

消去p_{H}，则有：

$$\sigma_{11\mathrm{H}}=2(\lambda^2-\lambda^{-1})(\frac{\partial W_{\mathrm{H}}}{\partial I_1}+I_1\frac{\partial W_{\mathrm{H}}}{\partial I_2})-2(\lambda^4-\lambda^{-2})\frac{\partial W_{\mathrm{H}}}{\partial I_2} \quad (14)$$

采用类似方法，计算可得单轴拉伸的粘性应力响应：

$$\sigma_{11\mathrm{V}}(\tau)=\sum_{r=1}^{n}\int_{0}^{t}\exp[-\varXi_r(\tau-\tau')]\frac{\partial}{\partial\tau'}\left[2(\lambda^2-\lambda^{-1})(\frac{\partial W_{\mathrm{V}}}{\partial I_1}+I_1\frac{\partial W_{\mathrm{V}}}{\partial I_2})-2(\lambda^4-\lambda^{-2})\frac{\partial W_{\mathrm{V}}}{\partial I_2}\right]\mathrm{d}\tau' \tag{15}$$

式中,t为物理时间。

假定单轴拉伸为匀速、匀应变率,则有:

$$\lambda=\dot{\varepsilon}_{11}\tau+1$$

$$\lambda'=\dot{\varepsilon}_{11}\tau'+1$$

式中,$\dot{\varepsilon}$为应变率。

将λ和λ'代入式(15)中,则有:

$$\sigma_{11\mathrm{V}}(\lambda)=\sum_{i=1}^{n}\int_{1}^{\lambda}\exp(-\Xi_r\frac{\lambda-\lambda'}{\dot{\varepsilon}_{11}})\frac{\partial}{\partial\lambda'}\left[2(\lambda'^2-\lambda'^{-1})(\frac{\partial W_{\mathrm{V}}}{\partial I_1}+I_1\frac{\partial W_{\mathrm{V}}}{\partial I_2})-2(\lambda'^4-\lambda'^{-2})\frac{\partial W_{\mathrm{V}}}{\partial I_2}\right]\mathrm{d}\lambda \tag{16}$$

联合式(14)和(16)则可得到单轴拉伸的应力响应:

$$\sigma_{11V}(\lambda)=2(\lambda^2-\lambda^{-1})(\frac{\partial W_{\mathrm{H}}}{\partial I_1}+I_1\frac{\partial W_{\mathrm{H}}}{\partial I_2})-2(\lambda^4-\lambda^{-2})\frac{\partial W_{\mathrm{H}}}{\partial I_2}+\sum_{r=1}^{n}\int_{1}^{\lambda}\exp(-\varXi_r\frac{\lambda-\lambda'}{\dot{\varepsilon}_{11}})\frac{\partial}{\partial\lambda'}\left[2(\lambda'^2-\lambda'^{-1})(\frac{\partial W_{\mathrm{V}}}{\partial I_1}+I_1\frac{\partial W_{\mathrm{V}}}{\partial I_2})-2(\lambda'^4-\lambda'^{-2})\frac{\partial W_{\mathrm{V}}}{\partial I_2}\right]\mathrm{d}\lambda' \tag{17}$$

1.3　材料的唯象模型

针对各向同性材料,其应变能密度可以按照Taylor公式[7]展开,则有:

$$W=\sum_{i,j,k=0}^{\infty}C_{ijk}(I_1-3)^i(I_2-3)^j(I_3-3)^k$$

当$i=1,j=1,k=0$时为Mooney-Rivlin模型:

$$W=C_{100}(I_1-3)+C_{010}(I_2-3) \tag{18}$$

当$i=3,j=0,k=0$时为Yeoh模型:

$$W=C_{100}(I_1-3)+C_{200}(I_1-3)^2+C_{300}(I_1-3)^3$$

引入橡胶分子链有限伸长的概念,考虑第一不变量存在一个最大值I_m,Gent模型[7]如下:

$$W=-\frac{E}{6}(I_m-3)\ln(1-\frac{I_1-3}{I_m-3})$$

式中,E为小变形拉伸的弹性模量。

高玉臣提出下式[7]:

$$W=a(I_1^b+I_{-1}^b)$$

式中,a和b为材料参数。

Arruda-Boyce模型[7]如下:

$$W=\mu\sum_{i=0}^{5}\frac{C_i}{\lambda_m^{2i-2}}(I_1^i-3^i)$$

式中,μ为材料参数,$C_1=1/2$,$C_2=1/20$,$C_3=11/1\,050$,$C_4=19/7\,000$,$C_5=519/673\,750$,C_i通过级数展开Langevin函数coth[$(x-1)/x$]的反函数而得。

Ogden对W进行扩展,去除了拉伸比偶次幂的限制,如下式[7]:

$$W=\sum_{i=1}^{N}\frac{2\mu_i}{\alpha_i^2}(\lambda_1^{\alpha_i}+\lambda_2^{\alpha_i}+\lambda_3^{\alpha_i}-3)$$

1.4　材料的粘-超弹性本构关系

将式(18)代入式(17)中进行积分计算即可得到以Mooney-Rivlin模型为基础的粘-超弹性模型。

取广义Maxwell模型的前2阶($n=2$),则有:

$$\sigma_{11}(\lambda)=2(\lambda^2-\lambda^{-1})[C_{100}+C_{010}(\lambda^2+\lambda^{-1})]-2C_{010}(\lambda^4-\lambda^{-2})+\sum_{r=1}^{2}\left\{4\tilde{C}_{100}^{r}\left[-\frac{\dot{\varepsilon}-\varXi_r\lambda^2\mathrm{E_i}\frac{\varXi_r\lambda}{\dot{\varepsilon}}\exp\frac{-\varXi_r\lambda}{\dot{\varepsilon}}+\dot{\varepsilon}\varXi_r\lambda}{2\dot{\varepsilon}^2\lambda^2}-\frac{(\varXi_r^2-\mathrm{Ei}\frac{\varXi_r}{\dot{\varepsilon}}-\dot{\varepsilon}^2\exp\frac{\varXi_r}{\dot{\varepsilon}}-\dot{\varepsilon}\varXi_r\exp\frac{\varXi_r}{\dot{\varepsilon}})\exp\frac{-\varXi_r\lambda}{\dot{\varepsilon}}}{2\dot{\varepsilon}^2}\right]-\frac{2\tilde{C}_{010}^{r}\dot{\varepsilon}\exp\frac{\varXi_r-\varXi_r\lambda}{\dot{\varepsilon}}}{\varXi_r}-\frac{2\tilde{C}_{100}^{r}\dot{\varepsilon}\exp\frac{-\varXi_r\lambda}{\dot{\varepsilon}}}{\dot{\varepsilon}\lambda}\left[\varXi_r\lambda(\mathrm{Ei}\frac{\varXi_r}{\dot{\varepsilon}}-\mathrm{Ei}\frac{\varXi_r\lambda}{\dot{\varepsilon}})+\dot{\varepsilon}(\exp\frac{\varXi_r\lambda}{\dot{\varepsilon}}-\lambda\exp\frac{\varXi_r}{\dot{\varepsilon}})\right]+\frac{4\tilde{C}_{100}^{r}\dot{\varepsilon}\left[(\dot{\varepsilon}-\varXi_r)\exp\frac{\varXi_r-\varXi_r\lambda}{\dot{\varepsilon}}-\dot{\varepsilon}+\varXi_r\lambda\right]}{\varXi_r^2}\right\} \tag{19}$$

式中,C_{100},C_{010},$\tilde{C}_{100}^{r}$和$\tilde{C}_{010}^{r}$为材料参数,Ei(x)为指数积分函数,定义如下:

$$\mathrm{Ei}(x)=-\int_{-x}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t$$

以其他应变能函数为基础的材料模型也可以以上述类似方法得到。由于材料模型的公式繁冗,不在此一一列出。

2　模型参数分析

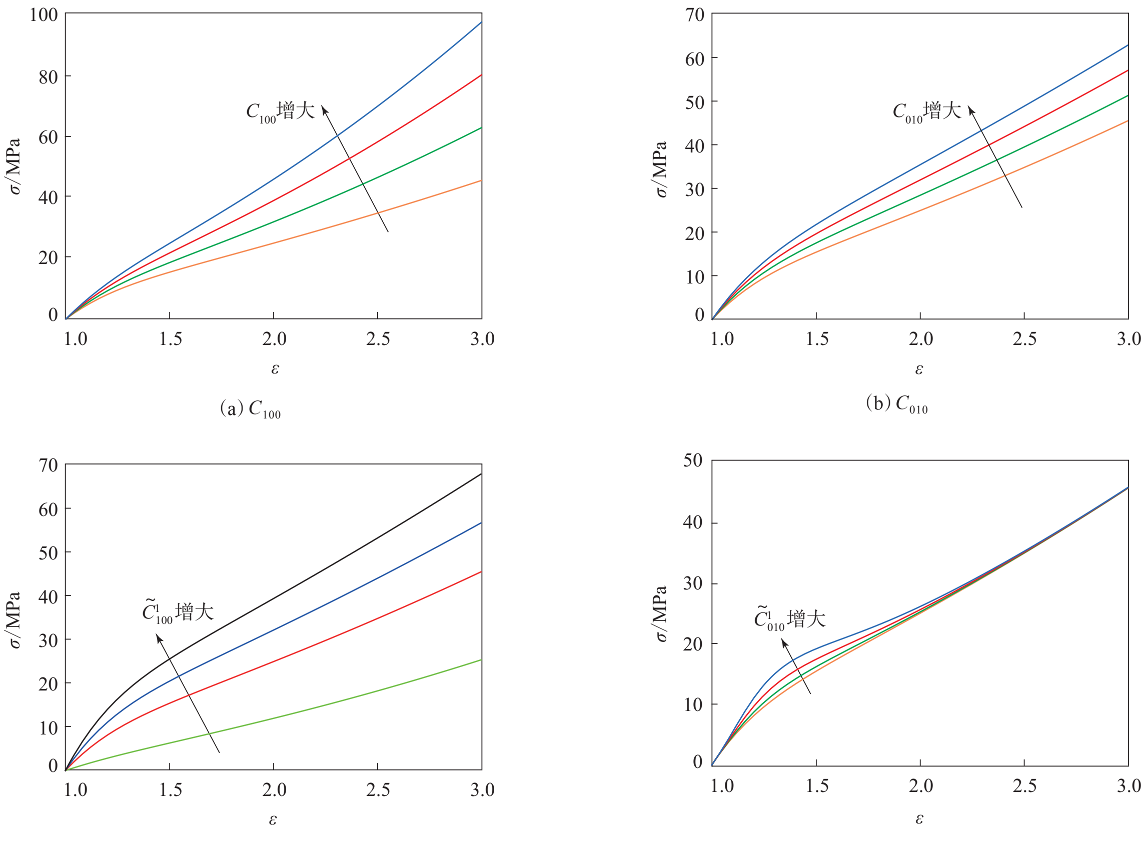
本工作仅针对以Mooney-Rivlin模型为基础的粘-超弹性本构关系[式(19)]进行参数分析[8]。其他应变能函数本构关系与此类似,不再赘述。

为方便起见,参数分析时仅取模型的第1阶。

Mooney-Rivlin模型参数对σ响应曲线的影响如图2所示，Maxwell模型参数及试验应变率对σ响应曲线的影响如图3所示。

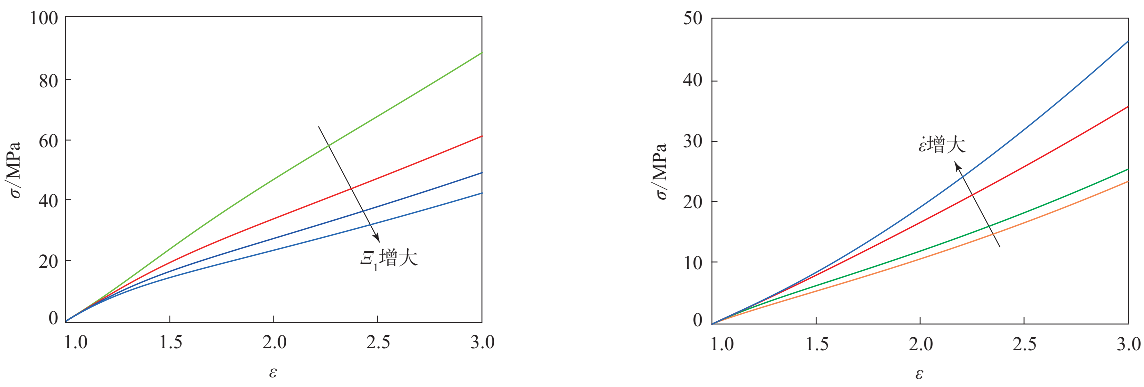
从图2可以看出：随着C_{100}，C_{010}和$\tilde{C}^{1}_{100}$的增大，σ响应均逐渐增大；$\tilde{C}^{1}_{010}$则主要对曲线拐点处σ产生影响，随着$\tilde{C}^{1}_{010}$增大，拐点处σ随之增大。

Ξ_1定义为E_1/η_1，即为松弛时间的倒数。松弛时间的延长可使材料更倾向于表现弹性行为。从图3可以看出：随着Ξ_1的减小，σ响应逐渐倾向于线性；而随着$\dot{\varepsilon}$的增大，σ响应逐渐增大。二者对模型



(a) C_{100}　(b) C_{010}　(c) $\tilde{C}^{1}_{100}$　(d) $\tilde{C}^{1}_{010}$

图2 Mooney-Rivlin模型参数对σ响应曲线的影响



(a) Ξ_1　(b) $\dot{\varepsilon}$

图3 Maxwell模型Ξ_1和$\dot{\varepsilon}$及试验应变率对σ响应曲线的影响

变化的影响均符合物理事实。

3 结论

本工作在热力学分析的基础上建立了弹性体材料基于τ的材料力学行为模型，并对模型参数进行了分析与研究。τ模型可以有效地对弹性体材料的应变率相关力学行为进行表征。模型参数与物理事实相吻合，具有工程应用价值。

参考文献：

[1] Song B，Chen W. One-dimensional Dynamic Compressive Behavior of EPDM Rubber[J]. Journal of Engineering Materials and Technology，2003，125（3）：294-301.

[2] Li Z，Wang Y L，Li X，et al. Experimental Investigation and Constitutive Modeling of Uncured Carbon Black Filled Rubber at Different Strain Rates[J]. Polymer Testing，2019，75：117-126.

[3] Guo L M，Lyu Y N，Deng Z F，et al. Tension Testing of Silicone Rubber at High Strain Rates[J]. Polymer Testing，2016，50：270-275.

[4] Rivlin R S，Saunders D W. Large Elastic Deformations of Isotropic Materials. VII. Experiments on the Deformation of Rubber[J]. Philosophical Transactions-Royal Society. London A，1951，243：251-288.

[5] Valanis K C. A Theory of Viscoplasticity without a Yield Surface，Part Ⅰ：General Theory；Part Ⅱ：Application to Mechanical Behavior of Metals[J]. Archives of Mechanics，1971，23：517-551.

[6] Schapery R A. On a Thermodynamic Constitutive Theory and Its Application to Various Nonlinear Materials[J]. Thermoinelasticity，1968：259-285.

[7] 曾祥国，陈华燕，陈军. 粘弹性力学[M]. 成都：四川大学出版社，2016：96-98.

[8] 何燕，蒋英男，唐元政，等. 橡胶拉伸行为的分子动力学模拟[J]. 橡胶工业，2019，66（6）：409-412.

收稿日期：2020-07-19

Strain Rate-related Mechanical Behavior Model of Elastomer Material

DUAN Yuxing，*YANG Qiang*，*ZHAO Miaomiao*，*SU Bo*

（Aircraft Strength Research Institute of China，Xi'an 710065，China）

Abstract：The strain rate-related mechanical behavior model of elastomer materials was studied. The force analysis of elastomer materials under uniaxial tension was carried out to obtain the relationship between stress and strain energy，and the intrinsic time variable of the material was studied on the basis of thermodynamic analysis. The intrinsic time variable was combined with the generalized maxwell model to obtain a model that expressed the viscosity of elastomeric materials，and this model was combined with the Mooney-Rivlin hyperelastic model to establish the strain rate-related mechanical behavior model of elastomeric materials. The analysis showed that the parameters in the model were consistent with the physical facts，and this model had engineering application value in the field of shock absorption and cushioning.

Key words：elastomer material；generalized Maxwell model；strain rate；intrinsic time；hyper elasticity

一种纯溴化丁基橡胶气密层及其混炼方法与应用 由通力轮胎有限公司申请的专利（公布号 CN 111745848A，公布日期 2020-10-09）"一种纯溴化丁基橡胶气密层及其混炼方法与应用"，涉及一种纯溴化丁基橡胶气密层胶料的混炼方法。该混炼方法为：向混炼装置中加入橡胶、配合剂和炭黑，在低转速Ⅰ下进行破碎；待温度达到90～95 ℃，加入工艺油，在高转速下进行混炼；待温度达到125～130 ℃，在低转速Ⅱ下进行分散混炼；待温度达到135～140 ℃排胶，冷却，静置，得到一段混炼胶；将一段混炼胶和硫化剂、促进剂进行混炼，得到终炼胶。

本发明方法能够很好地解决使用剪切型全四棱转子密炼机混炼易产生炭黑结块的工艺问题，其制备的混炼胶比现在使用的全四棱转子密炼机制备的混炼胶性能更稳定，炭黑分散更均匀，且没有炭黑结块，而且比使用ZZ2转子密炼机制备的混炼胶炭黑分散度更高以及硫化胶气密性更好。

（本刊编辑部 马 晓）