

橡胶类超弹性本构模型中材料参数的确定

燕山¹, 王伟^{1,2*}

(1. 青岛科技大学 橡塑材料与工程教育部重点实验室, 山东 青岛 266042; 2. 大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 辽宁 大连 116024)

摘要:采用单轴拉伸、等双轴拉伸及平面剪切下橡胶材料试验数据的 4 种不同组合方式分别对主要用于表述橡胶超弹性的 Yeoh 模型和 Ogden 三阶模型进行拟合, 并得出两种模型的材料参数。建立单轴拉伸、等双轴拉伸及平面剪切试验的有限元模型, 探究 1 种仅仅借助单轴拉伸试验数据并结合其他 2 种试验有限元模型预测结果, 进行橡胶类本构模型参数拟合的新方法。结果表明: 选用 Yeoh 模型时, 利用单轴拉伸和等双轴拉伸组合方式可获得较理想的材料参数; 在只具备单轴拉伸试验数据的条件下, 利用单轴试验数据和等双轴有限元模型预测数据的组合方式在低应变区用 Yeoh 模型拟合得到的材料参数较可靠; Ogden 三阶模型较 Yeoh 模型精度高, 但计算效率低且不易收敛。

关键词:超弹性材料本构模型; 单轴拉伸; 等双轴拉伸; 平面剪切; 有限元模型

中图分类号:TQ330.1; O241.82 **文献标志码:**A **文章编号:**1000-890X(2014)08-0453-05

橡胶作为一类超弹性材料具有大应变非线性特征, 这给数值模拟时材料参数的确定带来很大困难。目前, 描述超弹性材料本构关系最常用的模型是 Yeoh 模型和 Ogden 三阶模型。但不同应变下, 尤其是试验条件有限的情况下, 本构方程参数的确定却是一个比较棘手的问题, 吸引了众多学者的关注^[1-4]。一种超弹性材料的力学行为仅仅依赖单向拉伸性能试验并不能完全描述材料包括压缩及剪切在内的所有力学行为^[5], 必须对橡胶材料进行包括拉伸、压缩、剪切及体积试验等在内的全部基础试验^[6], 但国内能够同时进行上述试验的单位较少, 国外一般价格较贵且测试周期较长。因此, 探索一种利用有限的试验数据优化组合从而得到一组较为准确的材料参数的方法尤为重要。

1 超弹性材料模型

对于橡胶类超弹性材料力学性能的描述主要分为两类^[4]: 一类是以连续介质力学唯象理论为

基础的方法; 另一类是基于微观统计力学的方法。微观统计力学理论本构模型基于橡胶分子链呈非 Gauss 伸长以及分子交联网络结构建立, 是大应变条件下的应变能预测模型。相对而言, 统计力学理论本构模型需要的材料参数少, 但模型不能用于炭黑填充的橡胶材料^[7]。连续介质力学的唯象理论描述方法仅涉及观察到的橡胶性质, 而不是建立在聚合物分子结构基础上。该方法假设在未变形状态下橡胶为各向同性材料, 即长分子链的方向在橡胶中是随机分布的^[8-9]。工程中常用的应变能密度函数有 Yeoh 模型和 Ogden 模型。

1.1 Yeoh 模型

Yeoh 模型^[10]为减缩多项式的特殊形式, 其应变能密度函数为

$$W = \sum_{i=1}^3 C_{i0} (\bar{I}_1 - 3)^i + \sum_{i=0}^3 \frac{1}{D_i} (J - 1)^{2i} \quad (1)$$

式中, C_{i0} 和 D_i 均为待定材料模型参数, J 为弹性体积比, $\bar{I}_1$ 为第一阶应变不变量, 其表达式为 $\bar{I}_1 = \bar{\lambda}_1^2 + \bar{\lambda}_2^2 + \bar{\lambda}_3^2$, λ_1, λ_2 和 λ_3 为主伸长率, $\bar{\lambda}_i = J^{-\frac{1}{3}} \lambda_i$, 当材料看作体积不可压缩时, $J = 1$, 则式中后一项可省略且 $\bar{\lambda}_i = \lambda_i$ 。在小变形情况下, C_{10} 代表初始剪切模量; 由于第 2 个系数 C_{20} 为负, 在中等变形时可反映材料的软化现象; 但由于第 3 个系数 C_{30} 为正, 在大变形情况下又可描述材料的硬化现象。

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (21274072, 51151103077); 工业装备结构分析国家重点实验室开放基金资助项目 (GZ1213)

作者简介: 燕山 (1987—), 男, 山东莱芜人, 青岛科技大学硕士研究生, 主要从事载重子午线轮胎有限元分析研究。

* 通信联系人

1.2 Ogden 模型

Ogden 模型^[11]应变能密度函数为

$$W = \sum_{i=1}^N \frac{2\mu_i}{\alpha_i^2} (\bar{\lambda}_1^{\alpha_i} + \bar{\lambda}_2^{\alpha_i} + \bar{\lambda}_3^{\alpha_i} - 3) + \sum_{i=1}^N \frac{1}{D_i} (J-1)^{2i} \quad (2)$$

式中, α_i 和 μ_i 为待定材料模型参数, 其余参数与 Yeoh 模型表述一致。当 $N=1$ 时, Ogden 模型简化为 Mooney-Rivlin 模型; 当 $N=3$ 时, Ogden 模型称为 Ogden 三阶模型, 在工程中应用较广泛。

1.3 应力-应变关系的推导

在实际试验中常用到名义应力 σ 与名义应变 ϵ , 伸长率 $\lambda=1+\epsilon$ 。为方便计算公式中待定参数, 由应变能密度函数方程可推导出名义应力 σ 与伸长率 λ 的关系。

Rivlin^[11]已经证明, 对于纯均匀的应变, 在应变能密度和应力、应变之间存在如下关系:

$$\frac{t_1 - t_2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} = 2 \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + \lambda_3^2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \quad (3)$$

$$\frac{t_2 - t_3}{\lambda_2^2 - \lambda_3^2} = 2 \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + \lambda_1^2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \quad (4)$$

$$\frac{t_1 - t_3}{\lambda_1^2 - \lambda_3^2} = 2 \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + \lambda_2^2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \quad (5)$$

式中 t 为真实应力, 名义应力 $\sigma = t\lambda$ 。 $I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$, $I_2 = (\lambda_1\lambda_2)^2 + (\lambda_2\lambda_3)^2 + (\lambda_1\lambda_3)^2$

1.3.1 单轴拉伸

假设方向 1 为拉伸方向, 材料是不可压缩的, 则有 $I_3 = (\lambda_1\lambda_2\lambda_3)^2 = 1$ 。因此, 对于单向拉伸, 则有 $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda^{-\frac{1}{2}}$ 。

对于单轴拉伸, 其应力状态为 $\sigma_1 = \sigma = \frac{t}{\lambda}$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ 。

于是, 可进一步将 Yeoh 模型用名义应力 σ 和伸长率 λ 表示为

$$\sigma = [2C_{10} + 4C_{20}(I_1 - 3) + 6C_{30}(I_1 - 3)^2](\lambda - \lambda^{-2}) \quad (6)$$

同理, Ogden 三阶模型也可用 σ 和 λ 表示为

$$\sigma = \sum_{i=1}^3 \frac{2\mu_i}{\alpha_i} (\lambda^{\alpha_i-1} - \lambda^{-\frac{1}{2}\alpha_i-1}) \quad (7)$$

1.3.2 等双轴拉伸

假设 1 和 2 方向为拉伸方向, 则 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, $\lambda_3 = \lambda^{-2}$ 。其应力状态为 $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ 。

对于 Yeoh 模型, 在等双轴拉伸状态下, 其名义应力 σ 和伸长率 λ 的关系式为

$$\sigma = [2C_{10} + 4C_{20}(I_1 - 3) + 6C_{30}(I_1 - 3)^2](\lambda - \lambda^{-5}) \quad (8)$$

同理, 对于 Ogden 三阶模型, 其名义应力 σ 和伸长率 λ 的关系式为

$$\sigma = \sum_{i=1}^3 \frac{2\mu_i}{\alpha_i} (\lambda^{\alpha_i-1} - \lambda^{-2\alpha_i-1}) \quad (9)$$

1.3.3 平面剪切

假设 1 方向拉伸方向, 因宽度方向 (2 方向) 保持原始尺寸, 所以 $\lambda_2 = 1$, $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_3 = \lambda^{-1}$ 。

因 2 方向由刚硬的夹头支撑, 所以有 $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 \neq 0$, $\sigma_3 = 0$ 。

对于 Yeoh 模型, 在平面剪切状态下, 其名义应力 σ 和伸长率 λ 的关系式为

$$\sigma = [2C_{10} + 4C_{20}(I_1 - 3) + 6C_{30}(I_1 - 3)^2](\lambda - \lambda^{-3}) \quad (10)$$

同理, 对于 Ogden 三阶模型, 其名义应力 σ 和伸长率 λ 的关系式为

$$\sigma = \sum_{i=1}^3 \frac{2\mu_i}{\alpha_i} (\lambda^{\alpha_i-1} - \lambda^{-\alpha_i-1}) \quad (11)$$

2 试验设计

利用非线性有限元软件 Abaqus 建立单轴拉伸、等双轴拉伸及平面剪切有限元模型, 见图 1。

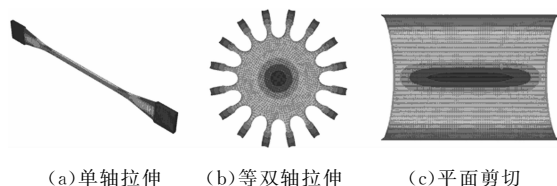


图 1 单轴拉伸、等双轴拉伸及平面剪切有限元模型

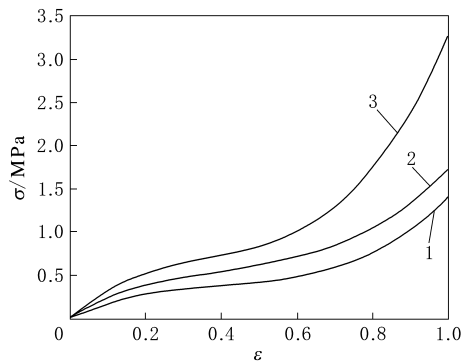
试验设计分为两大部分。

(1) 在 3 种试验数据 (单轴拉伸、等双轴拉伸及平面剪切) 都具备的情况下材料参数的最佳拟合方法。

利用已知试验数据 (见图 2)^[12], 选用 Yeoh 模型, 采用不同试验数据组合 ① 单轴拉伸和等双轴拉伸、② 单轴拉伸和平面剪切、③ 等双轴拉伸和平面剪切、④ 单轴拉伸、等双轴拉伸和平面剪切, 进行材料参数拟合, 将材料参数输入有限元模型模拟计算, 最后将模拟结果与试验结果作图对比。

采用 Ogden 三阶模型时, 重复上述过程。

(2) 在只具备单轴拉伸测试结果情况下材料参数的最佳拟合方法。



1—单轴拉伸;2—等双轴拉伸;3—平面剪切。

图 2 某橡胶不同试验模式下的应力-应变曲线

只采用单轴拉伸试验数据^[12]选用 Yeoh 模型拟合材料参数,利用已建立的有限元模型模拟计算出等双轴拉伸和平面剪切数据,然后同样选用

Yeoh 模型,采用不同模拟数据组合[同(1)]进行材料参数拟合,再次利用有限元模型进行计算,将模拟结果与(1)中的已知试验结果对比,验证在只具备一种测试结果情况下拟合的材料参数的可靠性,并找出最佳组合。

用 Ogden 三阶模型重复上述过程。

3 结果与讨论

3.1 单轴拉伸、等双轴拉伸和平面剪切 3 种试验数据下的计算结果

3 种试验数据 4 种不同组合方式下,分别采用 Yeoh 模型和 Ogden 三阶模型拟合试验数据得到本构参数,然后将图 1 所示有限元模型计算结果与相应试验结果对比,结果见图 3。

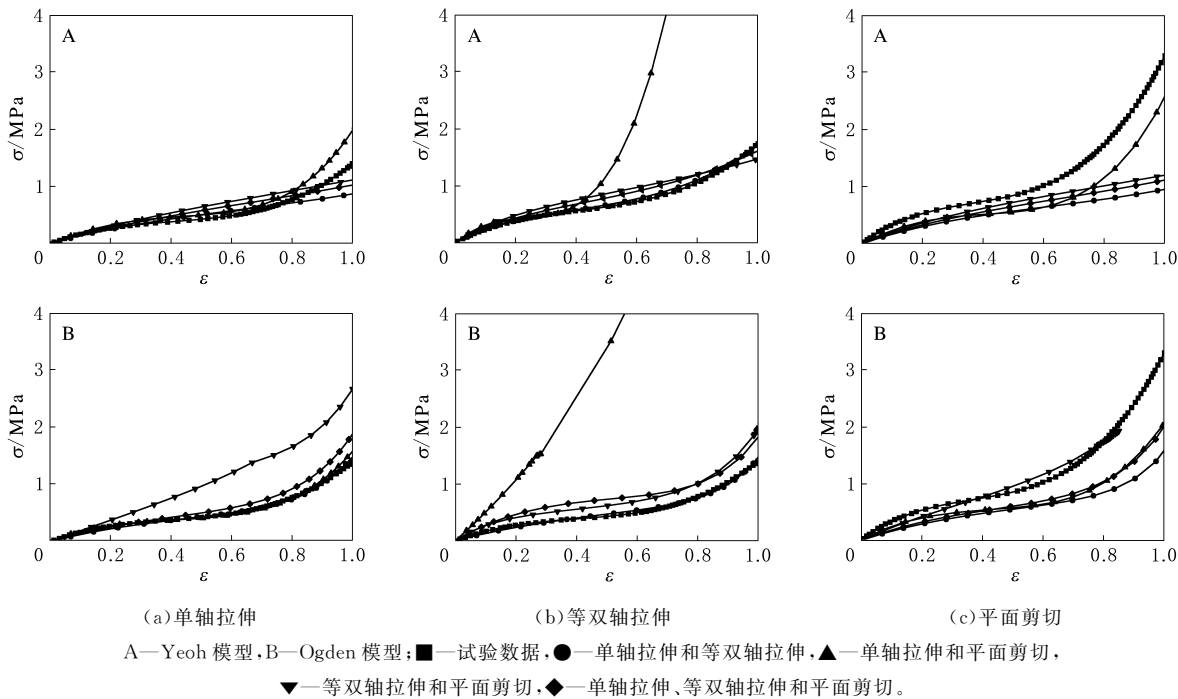


图 3 不同试验数据组合下得到的本构模型对不同有限元模拟结果的影响及与试验结果的比较

从图 3 可以看出,对于单轴拉伸和等双轴拉伸,采用单轴拉伸和等双轴拉伸试验数据组合拟合的材料参数能更准确地描述材料的力学行为,且选用 Ogden 三阶模型可获得更高的精度。但采用 Ogden 三阶模型进行等双轴拉伸和平面剪切有限元模型计算时较难收敛,需要的 CPU 时间较长,例如单轴拉伸和等双轴拉伸组合, Yeoh 模型总 CPU 时间为 29.6 s, Ogden 三阶模型总

CPU 时间为 37.2 s;对于等双轴拉伸和平面剪切组合, Ogden 三阶模型在应变后期计算增量步明显变小,甚至出现不收敛现象。图 3(c) 曲线趋势表明,对于 Yeoh 模型和 Ogden 三阶模型,不管采用何种组合方式,平面剪切模拟均不理想。综合考虑,在应变 $\epsilon < 0.75$ 时,采用单轴拉伸和等双轴拉伸组合, Yeoh 模型可以在保证精度的前提下,获得更高的计算效率。

3.2 单轴拉伸试验数据、等双轴拉伸和平面剪切试验仿真数据下的计算结果

仅采用单轴拉伸试验数据,而等双轴拉伸和平面剪切借助有限元模型仿真数据在4种不同组

合方式下,分别得到 Yeoh 模型和 Ogden 三阶模型的本构参数,然后将图 1 所示有限元模型计算结果与相应试验结果进行比较,结果见图 4。

从图 4(a)可以看出,在单轴拉伸模式下,不

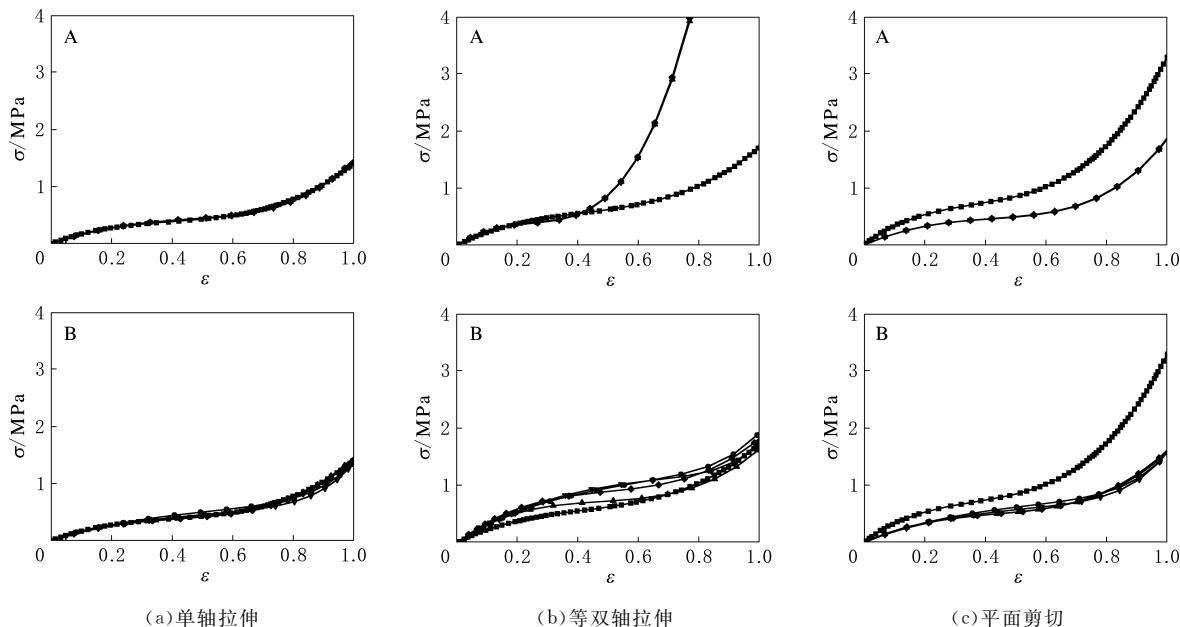


图 4 不同本构模型下平面剪切有限元模拟结果与试验结果对比

管采用何种数据组合方式,有限元预测结果与试验结果都吻合得很好。从图 4(b)可以看出,在只具备单轴拉伸试验条件下,对于单轴拉伸和等双轴拉伸,在应变 $\epsilon < 0.45$ 时,用 Yeoh 模型拟合的材料参数可以保证精度同时提高计算效率。在 $\epsilon > 0.45$ 时,为保证精度,建议采用 Ogden 三阶模型单轴拉伸和平面剪切组合方式确定材料参数。同样,无论采用何种组合,Ogden 三阶模型的计算时间都明显大于 Yeoh 模型。从图 4(c)可知,对于平面剪切试验,各种组合方式下得到有限元模型仿真结果都与试验结果相差较大。

4 结论

(1)当同时具备单轴拉伸、等双轴拉伸和平面剪切数据时,采用单轴拉伸和等双轴拉伸数据组合拟合的材料参数能更准确地反应材料的真实力学行为,且采用 Yeoh 模型较 Ogden 三阶模型计算代价更小,更易收敛。因此,若所模拟橡胶制品的受力仅涉及单轴拉伸或压缩、等双轴拉伸或压

缩时,可忽略平面剪切数据的影响,直接采用单轴拉伸和等双轴拉伸试验数据组合拟合材料参数,从而节约材料测试成本,提高计算效率。

(2)当只具备单轴拉伸试验数据时,可以先用有限元模拟的办法获得等双轴拉伸和平面剪切数据,然后再采用其间不同组合拟合材料参数。若应变较小(< 0.45)时,为了获得更高的计算效率可采用 Yeoh 模型;若应变较大(> 0.45)时,为保证精度,建议采用 Ogden 三阶模型单轴拉伸和平面剪切组合方式确定材料参数。

(3)对于平面剪切,利用 Yeoh 模型和 Ogden 三阶模型无论采用何种试验数据组合方式,都与材料的实际力学行为相差较大,因此在模拟的橡胶制品涉及平面剪切行为时,不建议采用上述材料参数拟合方法,需采用其他本构模型或进一步发展新的模型,或者借助新的拟合方法加以完善。

参考文献:

- [1] 王永冠,李心,黄友剑.橡胶计算中本构模型的选择[A].第四届全国橡胶制品技术研讨会论文集[C].北京:中国化学

会,中国汽车工程学会,2007:443-449.

[2] 危银涛,杨挺青,杜星文. 橡胶类材料大变形本构关系及有限元方法[J]. 固体力学报,1999,20(4):281-289.

[3] 徐立,吴桂忠. 有限元分析中橡胶应变能函数的若干形式[J]. 橡胶工业,1999,46(12):707-711.

[4] Steinmann P, Hossain M, Possart G. Hyperelastic Models for Rubber-like Materials: Consistent Tangent Operators and Suitability for Treloar's Data[J]. Archive of Applied Mechanics, 2012, 82(9): 1183-1217.

[5] Charlton D J, Yang J, Teh K K. A Review of Methods to Characterize Rubber Elastic Behavior for Use in Finite Element Analysis[J]. Rubber Chemistry and Technology, 1994, 67(3): 481-503.

[6] Miller K. Testing Elastomers for Hyperelastic Material Models in Finite Element Analysis[M]. UK: UK and International Press, 1999.

[7] 朱艳峰,刘峰,黄小清,等. 橡胶材料的本构模型[J]. 橡胶工业, 2006, 53(2): 119-125.

[8] 徐明. 橡胶类超弹性材料本构关系研究及有限元分析[D]. 北京:北京航空航天大学,2002.

[9] Ogden R W. Recent Advances in the Phenomenological Theory of Rubber Elasticity[J]. Rubber Chemistry and Technology, 1986, 59(3): 361-383.

[10] Yeoh O H. Some Forms of Strain Energy Function for Rubber[J]. Rubber Chemistry and Technology, 1993, 66(5): 754-771.

[11] Ogden R W. Large Deformation Isotropic Elasticity——On the Correlation of Theory and Experiment for Incompressible Rubberlike Solids[J]. Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences, 1972, 326(1567): 565-584.

[12] Manuel J, Garcia R, Oscar E, et al. Hyperelastic Material Modeling[R]. Medellin: Universided EAFIT, 2005.

收稿日期:2014-02-22

Determination of Material Parameters for Rubberlike Hyperelastic Constitutive Models

YAN Shan¹, WANG Wei^{1,2}

(1. Qingdao University of Science and Technology, Qingdao 266042, China; 2. Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: The material parameters of Yeoh model and third order Ogden model, which were mainly used to characterize the hyperelastic behavior of rubber, were obtained by four different combinations of the uniaxial tension, biaxial tension and planar shear test data. The finite element models for the uniaxial tension, biaxial tension and planar shear experiments were established. Then a new method was explored to obtain the constitutive parameters for the rubberlike material by using the uniaxial tension test data in combination with the simulated results of biaxial tension and planar shear test from the finite element models. It was found that the fitting parameters of Yeoh model by using the combination of the uniaxial and biaxial tension test data were good. With the combination of uniaxial tension test data and simulated biaxial tension results, the fitting parameters of Yeoh model were only reliable in the low strain zone. The third order Ogden model had much higher prediction precision than Yeoh model. However, the Ogden model parameters from the finite element model had lower computation efficiency than that of Yeoh model, and it easily created the difficulty of convergence.

Key words: hyperelastic constitutive model; uniaxial tension; biaxial tension; planar shear; finite element model

带有橡胶层的汽车脚踏板

中图分类号: TQ336. 4⁺3 文献标志码: D

由钱德洪申请的专利(公开号 CN 102951057A, 公开日期 2013-03-06)“带有橡胶层的汽车脚踏板”, 涉及的带有橡胶层的汽车脚踏板含有金属层, 金属层表面设有橡胶层, 橡胶层表面设有防滑凸起, 条形凸纹为水平布置或者交错布置, 点状凸起为阵列排布或者圆周排布。该汽车脚踏板的金属层表面设有橡胶层, 使得乘客踩踏舒适, 橡胶层的表面设有防滑凸起, 保证了脚踏板的防滑性能, 提高了安全系数。

(本刊编辑部 赵 敏)