有限元分析中橡胶应变能函数的若干形式

徐　立　吴桂忠
(北京橡胶工业研究设计院　100039)

摘要　介绍在有限元分析中描述橡胶力学性能常用的应变能函数。以应变不变量表示的应变能函数, 较常用的有 Rivlin 模型、neo-Hookean 模型、Mooney-Rivlin 模型、Gent-Thomas 模型、Nicholson-Nelson 模型等; 以伸张率表示的应变能函数常用的有 Valanis-Landel 模型、Peng-Landel 模型和 Tobisch 模型、Ogden 模型等。这些模型各有其特点和适用性。

关键词　橡胶, 有限元分析, 应变能函数

作为一种工程材料, 橡胶具有良好的弹性, 在负载结构支承、弹簧、密封件、减震衬套、法兰接头及轮胎等领域得到广泛应用, 但是橡胶的性能非常复杂, 不能像金属那样用相当少的几个参数就可以描述。就材料特性和几何特性来说, 橡胶是非线性的。橡胶的力学性能对温度、环境、应变历史、加载速率和应变率的影响相当敏感, 生产工艺和添加剂(如添加炭黑的多少和种类)对橡胶的力学性能也有重要影响。

为描述橡胶的力学性能(特别是弹性性能), 曾经提出过许多理论模型, 但是除几种几何形状和最简单承载的情况外, 现有模型的封闭型解也十分复杂。庆幸的是, 由于计算机的飞速发展和普及, 基于计算机的有限元分析被应用在橡胶制品的设计中, 人们已经有能力不再按照传统方法解决复杂问题。特别是有处理弹性体材料能力的有限元分析程序的出现, 为工程应用中进一步研究、认识、理解和优选橡胶类材料提供了有效的方法。

数值解的可靠性依赖于橡胶力学性能描述方法的准确性。描述橡胶材料力学性能的基本方法是通过实验确定某一简单变形模式的应力-应变属性。从实验的角度讲, 最简单的变形模式是单轴拉伸。然而实际上这也不像它所表现的那样简单, 普遍的观点认为结合两种以上变形模式的测量是必要的。其次, 通过回归分析对实验得到的应力-应变数据拟合一适当的应变能函数, 然后以这个拟合函数作为有限元分析的输入, 预测要设计橡胶部件的载荷-变形性能。这个过程是简单变形模式的曲线拟合过程, 并被推广到更复杂的变形模式。

理论上, 应变能函数可以是许多可能的力学函数中的任何一个, 因此在橡胶有限元分析中可供应用选择的应变能函数不止一种。本文介绍这些应变能函数的若干形式, 并讨论它们的适用性。

1　橡胶力学性能的理论描述

研究橡胶的力学性能主要有两类方法: 一类方法是用统计或分子动力学的观点导出硫化橡胶结构的一些理想模型, 这是我们理解橡胶高分子性能的基础; 另一类方法是以连续介质力学为基础, 用唯象学理论处理问题。相比较, 前一类方法假定橡胶分子链的长度、排列、结构是统计分布的, 似乎不适用于大应变, Shaw 和 Young 曾经指出统计理论只适用于 50%应变的情况; 后一类方法构造了描述橡胶性能的力学框架, 可以不考虑橡胶微观结构或分子概念而解决应力分析和应变分析问题[1]。

在橡胶材料的有限元分析中, 为了得到便于程序应用的简化过程, 只要结果保持在橡胶工程设计公差之内, 有时需要牺牲理论上的严密性, 甚至精度和准确性。假定在零应变状态下橡胶聚合物的长链分子随机分布, 橡胶是各向同性的, 伸张改变分子分布。这样硫化橡胶的力学性能可以采用(弹性)应变能密度 W(单位体积内储存的应变能)描述。不论是否认为橡胶是不可压缩的, W 既可以表示为应变不变量的多项式, $W = W(I_1, I_2, I_3)$, 也可以直接用

作者简介　徐立, 男, 1969 年出生。1996 年获天津大学流体力学专业硕士学位。从事轮胎结构设计和轮胎有限元分析工作。

主伸张率表示, $W = W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$。$I_1$, I_2, I_3 也称为Green 应变不变量, 分别为

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$$
$$I_2 = (\lambda_1\lambda_2)^2 + (\lambda_2\lambda_3)^2 + (\lambda_3\lambda_1)^2$$
$$I_3 = (\lambda_1\lambda_2\lambda_3)^2 \qquad (1)$$

式中 λ_1, λ_2 和 λ_3 为主伸张率, 下标 1, 2 和 3 分别表示 3 个相互正交的方向。W 的具体函数形式用实验的方法确定。

由于橡胶的力学性能含有弹性效应和滞后(不可恢复)效应, 而应变能函数只与当前的应变状态有关, 并不依赖应变发生的过程, 因此应变能函数只限于弹性(完全可恢复)效应, 不能完整地概括滞后效应。天然橡胶加载和卸载的应力-应变曲线近乎一致, 几乎没有能量损失或生热。建立应变能函数用于天然橡胶是最简便和准确的。工程中应用的橡胶制品一般都含有炭黑、硫黄等添加剂, 有明显的滞后效应。因此在应用(弹性)应变能函数时, 我们要做额外工作, 认真地处理实验数据。

1.1 用应变不变量表示的应变能函数

在任意坐标参照系中一旦表述了橡胶的弹性关系, 应变不变量就自然地产生, 并与坐标系的选择无关。这样也就可以不考虑空间方向而分析运动的物理规律。

对于橡胶, 较常被引用的连续体模型是 Rivlin 提出的。考虑有限可压缩情况, 模型最一般的形式如下[2]:

$$W = \sum_{i+j=1}^{N} C_{ij}(I_1^c - 3)^i (I_2^c - 3)^j + \sum_{1}^{N} \frac{1}{D_i}(J^c - 1 - R)^{2i} \qquad (2)$$

式中 C_{ij}——Rivlin 因数;

D_i——定义材料的压缩性;

R——定义随温度而变化的体积膨胀;

$$I_1^c = (\lambda_1^c)^2 + (\lambda_2^c)^2 + (\lambda_3^c)^2$$
$$I_2^c = (\lambda_1^c\lambda_2^c)^2 + (\lambda_2^c\lambda_3^c)^2 + (\lambda_3^c\lambda_1^c)^2$$
$$J^c = \lambda_1^c\lambda_2^c\lambda_3^c$$
$$\lambda_i^c = (J^c)^{-\frac{1}{3}}\lambda_i$$

(上标“c” 表示可压缩)

方程(2)中的第 1 个级数表示储存的能量密度偏量, 与剪切类变形有关, 展开式的因数 C_{ij} 由采集的实验数据回归确定。第 2 个级数表示橡胶储存能量与体积有关的部分, D_i 和 R 也由实验确定。

对应某指定应变能密度函数的应力由 Cauchy 应力张量方程得到。Cauchy (真实) 应力张量方程如下:

$$\sigma^\tau = (A_1 + A_2 I_1^c)B^c - A_2 B^c B^c + pI \qquad (3)$$

式中

$$A_1 = \frac{2}{J^c}\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}I_1^c}$$
$$A_2 = \frac{2}{J^c}\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}I_2^c}$$
$$B^c = F^c(F^c)^T$$
$$F^c = (J^c)^{-\frac{1}{3}}F$$
$$p = -\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}J^c} \qquad (4)$$

式中, I 是单位矩阵, F 是变形梯度矩阵, 它表示当前形状改变的坐标(x_i)与初始未变形的坐标(X_i)的几何关系。

工程应力 σ 与 Cauchy 应力 σ^τ 的关系为

$$\sigma_i = \frac{\sigma_i^\tau}{\lambda_i} = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\lambda_i} \qquad (5)$$

方程(2)是 Rivlin 模型的最一般形式, 相当复杂。研究人员为适应自己应用的需要, 在此基础上提出了各种形式的模型, 其中不乏考虑橡胶有限可压缩性的, 如 Fried 和 Johnson 为解轴对称生胶块的压缩问题而建立的方程[1]:

$$W = C_1(I_1 - 3I_3^{1/3}) + C_2(I_2 - 3I_3^{2/3}) + \frac{K}{2}(\ln I_3)^2 \qquad (6)$$

由于橡胶的体积模量比剪切模量大几个数量级, 因此通常假定橡胶是不可压缩的。在对橡胶的限制不是很强时, 不可压缩性假定对橡胶来说是适合的。

理想不可压缩材料的体积不变化, 即

$$J^c = \lambda_1^c\lambda_2^c\lambda_3^c = J = 1 \qquad (7)$$

且恒温

$$R(T) = 0 \qquad (8)$$

由此有

(a) $\lambda_i^c = \lambda_i$;

(b) $I_i^c = I_i$;

(c)方程(2)中与体积有关的级数趋于 0。于是方程(2)表示的 Rivlin 模型变成

$$W=\sum_{i+j=1}^{N}C_{ij}(I_1-3)^i(I_2-3)^j \tag{9}$$

方程(9)在应用时一般截断幂级数，只保留前几项。若只保留第一项，则得到 *neo*-Hookean 模型[3]：

$$W=C_{10}(I_1-3) \tag{10}$$

它给出如下的应力-应变关系：

单轴拉伸和压缩

$$\frac{\sigma}{\lambda-\lambda^{-2}}=2C_{10} \tag{11}$$

简单剪切

$$\frac{\tau}{\gamma}=2C_{10} \tag{12}$$

式中，τ 表示剪应力，γ 是对应不变量 I_1 的剪应变，$\gamma^2=(I_1-3)$。

实验研究发现，*neo*-Hookean 模型预测的橡胶性能与实际橡胶不符。

按照统计理论，橡胶弹性体的应变能函数为

$$W=\frac{1}{2}NkT(I_1-3) \tag{13}$$

式中，N 为单位体积网状链数，k 是 Boltzmann 常数，T 是绝对温度。

这里可以看出，尽管统计理论和唯象理论出发的前提完全不同，但是方程(10)和(13)有相同的形式。这是 *neo*-Hookean 模型的重要性所在[3]。

若取方程(9)的前两项，得到 Mooney-Rivlin 模型：

$$W=C_{10}(I_1-3)+C_{01}(I_2-3) \tag{14}$$

式中，C_{01}和 C_{10}可以认为是材料常数，但是实际上没有十分明确的物理意义，仅作为实验数据的回归系数处理。方程(14)给出的应力-应变关系如下：

单轴拉伸和压缩

$$\frac{\sigma}{\lambda-\lambda^{-2}}=2C_{10}+\frac{1}{\lambda}2C_{01} \tag{15}$$

简单剪切

$$\frac{\tau}{\gamma}=2C_{10}+2C_{01} \tag{16}$$

很明显，式(15)可以表示一条斜率为 $2C_{01}$、截距为 $2C_{10}$的直线。拉伸实验数据通常与式(15)一致。简单剪切实验中$\frac{\tau}{\gamma}$是非线性的，式(16)与此相违背。

在式(14)中，小应变的杨氏模量(E)和剪切模量(μ)常有这样的关系：

$$E=6(C_{10}+C_{01})\approx\mu \tag{17}$$

以简化描述橡胶性能的分子网格理论为基础，Gent 和 Thomas 建立模型：

$$W=C_1(I_1-3)+C_2\ln\frac{I_2}{3} \tag{18}$$

式中

$$I_1=\lambda_1^2+\lambda_2^2+(\lambda_1\lambda_2)^{-2}$$
$$I_2=\lambda_1^{-2}+\lambda_2^{-2}+(\lambda_1\lambda_2)^2 \tag{19}$$

Gent 和 Thomas 认为式(18)比两项 Mooney-Rivlin 公式更有利，特别在描述单轴向压缩方面[1]。

Mooney-Rivlin 公式虽然简单，应用方便，但是在方程(9)可能的展开式中没有取足够多的展开项，不能提供多轴数据的充分预测，因此在预测与其它变形模式相关的应力时，经常会发现 Mooney-Rivlin 公式的不足。

许多含有高阶项的应变能函数也被用在橡胶制品的有限元分析中，含有 λ_i^2，λ_i^4 和λ_i^6 的三阶近似公式就是较常应用的一个，即

$$W=C_{10}(I_1-3)+C_{01}(I_2-3)+C_{20}(I_1-3)^2+C_{11}(I_1-3)(I_2-3)+C_{30}(I_1-3)^3 \tag{20}$$

这个幂级数既含有低阶项，也含有高阶项，对多轴数据有极好的预测能力。但是实际应用时，特别是小变形情况，所要求的实验不容易做，产生的误差大，因此有些文献依据 $\partial W/\partial I_2$ 的变形问题得出互相矛盾的结果就不足为奇了[3]。

Yeoh 以(I_1-3)的形式建立应变能函数

$$W=C_{10}(I_1-3)+C_{20}(I_1-3)^2+C_{30}(I_1-3)^3 \tag{21}$$

对应的应力-应变关系如下：

单轴拉伸和压缩

$$\frac{\sigma}{\lambda-\lambda^{-2}}=C_{10}+4C_{20}(I_1-3)+6C_{30}(I_1-3)^2 \tag{22}$$

简单剪切

$$\frac{\tau}{\gamma}=2C_{10}+4C_{20}(I_1-3)+6C_{30}(I_1-3)^2 \qquad (23)$$

与 neo-Hookean 函数和 Mooney-Rivlin 函数比较，体积应变能函数有随变形而变化的剪切模量 τ/γ。这个模型可以应用在更大的应变范围[4]。

上面的模型都是以等温度假定为条件的。为说明温度的影响，Nicholson 和 Nelson 对 Mooney-Rivlin 函数做了适当扩展，即

$$W(T,I_i)=C_1(I_1-3)+C_2(I_2-3)+\rho T_0C_3\frac{T}{T_0}\ln\frac{T}{T_0}+2C_4(T-T_0)(T_2-3) \qquad (24)$$

式中 T 为绝对温度[1]。

1.2 以伸张率表示的应变能函数

应变能函数也可以表示为主伸张率 λ_1，λ_2 和 λ_3 的多项式。这些函数的优点在于直接利用收集到的测试数据或已发表的伸张率。Valanis 和 Landel 提出了不可压缩材料应变能函数的分离对称形式

$$W=W(\lambda_1)+W(\lambda_2)+W(\lambda_3) \qquad (25)$$

Valanis 和 Landel 又在实验基础上给出

$$W=2\mu\sum_{i=1}^{3}[\lambda_i(\ln\lambda_i-1)] \qquad (26)$$

式中 μ 为剪切模量。并指出方程(26)在 $0.6<\lambda<2.5$ 范围有效。

Peng 和 Landel 应用 Valanis 和 Landel 的理论，分析得到如下截断函数：

$$W=\sum_{i=1}^{3}C[\lambda_i-1-\ln\lambda_i-\frac{1}{6}(\ln\lambda_i)^2+\frac{1}{18}(\ln\lambda_i)^3-\frac{1}{216}(\ln\lambda_i)^4] \qquad (27)$$

与已发表的双轴实验数据比较，方程(27)在 $1<\lambda<2.5$ 范围有效。

Tobisch 提出经验模型：

$$W'(\lambda_i)=\frac{\mathrm{d}W(\lambda_i)}{\mathrm{d}\lambda_i}=2\overline{G}\exp[A(\lambda_i^2-1)]-B\lambda_i^{-3} \qquad (28)$$

同样符合方程(25)定义的公式，式中 $\overline{G}$，A 和 B 用回归分析根据实验数据确定。Tobisch 验证，式(28)与以前发布的许多未填充和弱填充胶料的实验数据有较好拟合。

Ogden 给出的材料模型当前应用较普遍。Ogden 应变能函数为

$$W=\sum_{i=1}^{N}\frac{\mu_i}{\alpha_i}(\lambda_1^{\alpha_i}+\lambda_2^{\alpha_i}+\lambda_3^{\alpha_i})+\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{D_i}(J-1-R)^i \qquad (29)$$

式中 α_i，μ_i，D_i 和 R 可以认为是材料参数，但是它们的数值由收集的实验数据确定。幂指数 α_i 是能拟合完全非线性实验数据的任意实数。这是方程(29)的有益之处[1]。

引入橡胶的不可压缩性，方程(29)的第 2 个级数趋于零。与早期的材料模型对应，Mooney 把 Ogden 应变能函数写成

$$W=\sum_{i=1}^{\infty}[A_{2n}(\lambda_1^{2n}+\lambda_2^{2n}+\lambda_3^{2n}-3)+B_{2n}(\lambda_1^{-2n}+\lambda_2^{-2n}+\lambda_3^{-2n}-3)] \qquad (30)$$

在方程(29)中上标 α_i 不必是整数，方程(30)中的正负脚标也不必对应，方程(30)允许有奇数项[5]。

方程(30)对应的应力-应变关系如下：

简单拉伸和压缩

$$\sigma=\frac{2E_0}{3\alpha}(\lambda^{\alpha-1}-\lambda^{-\frac{\alpha}{2}-1}) \qquad (31)$$

简单剪切

$$\frac{\tau}{\gamma}=\frac{2G_0}{\lambda}\frac{\lambda^{\alpha}-\lambda^{-\alpha}}{\lambda^2-\lambda^{-2}} \qquad (32)$$

式中，$G_0=\frac{\mu\alpha}{2}$，$E_0=3G_0$。

1.3 小结

前面给出了橡胶应变能函数的若干形式，它们分别属于两类应变能函数。一类是类似方程(2)的 Rivlin 函数，一类是类似方程(29)的 Ogden 函数，按照 Rivlin 和 Sawyers 的观点，Ogden 函数只是 Rivlin 应变能函数的一种特殊形式，Treloar 认为，选择哪类形式，简单地讲仅是个便于应用的问题。有时主伸张率比应变不变量更便于度量变形。Ogden 函数除了直接以主伸张率表示外，实际上并不比 Rivlin 函数更有利。从有限元分析的角度讲，根据实际问题的需要，只要提供合理数量的拟合系数，能充分描述材料性能，选择哪类应变能函数都可行。至于选择哪一具体形式的应变能函数，由研究者视具体问题分析比较确定，如方程(14)、(21)和方程(30)都曾经被用在轮胎的有限元分析中[1,3,5,6]。

2　橡胶应变能函数在有限元分析中的应用

橡胶是高度非线性的弹性体,应力-应变关系较为复杂。在橡胶制品的有限元分析中,用应变能函数描述橡胶的力学性能,减少了程序要求输入的材料参数。当前多数通用有限元程序如 ANSYS, ABAQUS 和 MARC 等具有分析橡胶非线性的能力,它们给出的应变能函数有类似于方程(2)的 Rivlin 型方程,也有类似于方程(29)的 Ogden 型方程。这些程序有的要求直接输入实验数据,有的要求输入相应参数。也有的程序给出由实验数据确定橡胶应变能函数各系数的子模块,并绘出拟合曲线。从可视化的图形结果看,研究者可以直接观察到选择的应变能函数对实验数据的拟合情况,进而判断该函数的拟合效果。另外,有些通用有限元程序为用户的特殊研究需要还提供这样的接口:用户可以在程序的输入部分写一段简短的 FORTRAN 子程序,自己定义材料模型;用户也可以在不同的应力-应变区间选择不同的材料模型。

为得到更佳的预测结果,不论橡胶的材料模型是如何定义的,橡胶制品的有限元分析通常要求作为程序输入的或用来确定相应输入参数的实验数据应覆盖分析中可能产生的应力-应变范围。

参考文献

1　Charlton D J, Yang J. A review of methods to characterize rubber elastic behavior for use in finite element analysis. Rubber Chem. and Technol., 1994, 67(3): 481～503

2　Rivlin R S. The elasticity of rubber. Rubber Chem. and Technol., 1992, 65(3): 51～67

3　Yeoh O H. Some forms of the strain energy for rubber. Rubber Chem. and Technol., 1993, 66(5): 754～771

4　Yeoh O H. Characterization of elastic properties of carbon black-filled rubber vulcanizates. Rubber Chem. and Technol., 1990, 63(5): 798～771

5　Yeoh O H. On the Ogden strain-energy funtion. Rubber Chem. and Technol., 1997, 70(2): 175～182

6　Landel R F. A simple $W'(\lambda)$ function for the valanis-landel form of stored energy function. Rubber Chem. and Technol., 1998, 71(2): 234～243

收稿日期　1999-06-19

Some Forms of Strain Energy Function for Rubber with Finite Element Analysis

Xu Li and Wu Guizhong

(Beijing Research and Design Institute of Rubber Industry　100039)

Abstract　The strain energy functions to characterize the mechanical properties of rubber with FEA are described. The common strain energy functions expressed as strain invariables include Rivlin model, *neo*-Hookean model, Mooney-Rivlin model, Gent-Thomas model and Nicholson-Nelson model etc.; the common strain energy functions expressed as elongations include Valanis-Landel Model, Peng-Landel model, Tobisch model and Ogden model etc.. The models have different characteristics and suitable applications.

Keywords　rubber, finite element analysis, strain energy function

EPDM 电缆无损检验法

英国《欧洲橡胶杂志》1999 年 181 卷 9 期 7 页报道:

日本核电工业专家声称,他们已经找到了检测 EPDM 绝缘电缆老化程度的方法。核电厂电缆老化是对安全至关重要的问题,因此,日本核电工业专家组的目标就是要寻找检测电缆剩余使用寿命的试验方法。他们说,“超声波传播速度”特别适用于 EPDM 的无损诊断,而 EPDM 是核电厂安全系统电缆广泛使用的材料。

(涂学忠摘译)