

橡胶弯管胶料在挤出流道中流场的有限差分法计算

何红

(北京化工大学机械工程学院 100029)

摘要 用有限差分法计算幂律流动胶料在橡胶弯管挤出流道中的流场。结果表明,选用双圆柱坐标系可将幂律流动胶料在偏心圆环域中的轴向层流流动计算转换为简单的矩形域流动计算,采用平面有限差分法计算速度场能得到弯管宽隙和窄隙处的胶料流速比,计算结果与试验结果基本吻合。

关键词 橡胶弯管,挤出,流场,有限差分法,双圆柱坐标系,偏心圆环域,矩形域

橡胶弯管机头是集机、电、液于一体的新设备,不仅能直接挤出橡胶弯管,而且能实现自动控制。本文针对弯管机头流道的不对称性,采用双圆柱坐标系对幂律流动胶料在弯管挤出流道中的流场进行了计算和试验验证。

1 双圆柱坐标及胶料流动动量方程

研究表明^[1],橡胶弯管弯曲半径的变化规律与弯管机头流道宽隙和窄隙处的流速比相关,因此需要精确计算弯管机头流道中胶料的流场。

1.1 双圆柱坐标系

空间点 $M(x, y, z)$ 在平面直角坐标系 xoy 上的投影点 P 除可用坐标 x 和 y 确定外,还可用有序数 α 和 β 来确定。 α 和 β 在几何上与扩充复平面上的 α 族和 β 族圆周中的一对圆对应。 β 族圆周是通过实轴上与原点 o 对称的不动点 $Z_1(-c, 0)$ 和 $Z_2(+c, 0)$ 的一族广义圆。 β 族圆周在不动点 Z_2 的切线与 x 轴的正向夹角为 β 。 β 是表征 β 族圆周的特征量。规定实轴上方弧段的 β 为正值 ($0 \sim +\pi$) 而实轴下方弧段的 β 为负值 ($-\pi \sim 0$)。 α 族圆周是与 β 族圆周正交的一族广义圆。不动点 Z_1 和 Z_2 也是 α 族圆周的一对对称点,即 $|PB|^2 = |Z_1B| \cdot |Z_2B|$,那么 $|PB|$ 是 α 族圆周中任意一个圆的半径 r , α 是与 r 有关的表征 α 族圆周的特征量。这样在 xoy 平面上除点 Z_1 和 Z_2

外,其余各点必有 β 族圆周中的一个弧段和 α 族圆周中的一个圆通过。因此,点 P 可用有序数 α 和 β 来确定,空间内一点可用 3 个有序数 α, β 和 z 来确定;有序数 α, β 和 z 叫做点 M 的双圆柱坐标,它们的变化范围是: $-\infty < \alpha < +\infty, -\pi < \beta < +\pi, -\infty < z < +\infty$ 。

在直角坐标与双圆柱坐标的变换中,点 M 的坐标 z 不变化, x 和 y 与 α 和 β 的变换关系如下:

$$x = \frac{c \cdot \text{sh } \alpha}{\text{ch } \alpha - \cos \beta} \quad (1)$$

$$y = \frac{c \cdot \sin \beta}{\text{ch } \alpha - \cos \beta} \quad (2)$$

$$c = |OZ_2| = r_1 |\text{sh } \alpha_1| = r_2 |\text{sh } \alpha_2| \quad (3)$$

$$Z_r = c \cdot \text{cth } \alpha \quad r = \frac{c}{|\text{sh } \alpha|}$$

式中 Z_r 为 α 族圆周的圆心到直角坐标系原点 o 的距离; c 为常数。当 α 取一实数时,得到一个确定的圆周,其圆心为 $(c \cdot \text{cth } \alpha, 0)$, 半径为 $c/|\text{sh } \alpha|$ 。

橡胶弯管机头的流道截面如图 1 所示,具有不对称性,属于偏心圆环域,用直角坐标求解胶料的流场困难,因此选用双圆柱坐标。对于偏心圆环域,已知半径为 r_1 和 r_2 的 2 个圆及其偏心距为 e ,用双圆柱坐标求解时,该域可用双圆柱坐标下的值 α_1 和 α_2 表示^[2]:

$$\text{ch } \alpha_1 = \frac{1}{r} \cdot \frac{r(1 + \Phi^2) + (1 - \Phi^2)}{2\Phi} \quad (4)$$

$$\text{ch } \alpha_2 = \frac{r(1 - \Phi^2) + (1 + \Phi^2)}{2\Phi} \quad (5)$$

$$r = \frac{r_1}{r_2} \quad \Phi = \frac{e}{r_2 - r_1}$$

作者简介 何红,女,32岁。讲师。北京化工大学机械工程学院在职博士生。主要从事高分子材料加工理论,尤其是挤出和流变学理论的研究。

用式(3)~(5)可将 r_1 , r_2 和 e 转换为双圆柱坐标系下的坐标值 α_1 , α_2 和不动点 Z 坐标的绝对值 c 。偏心圆环域内的求解也变为矩形域内的求解: $\alpha_2 < \alpha < \alpha_1$, $-\pi < \beta < +\pi$ 。在这样规整的矩形域内求解为数值求解, 为有限差分法求解提供了方便, 这就是采用双圆柱坐标系的优点所在。

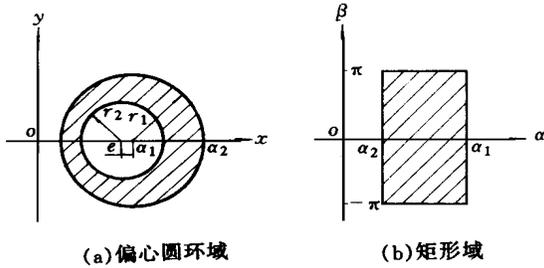


图1 偏心圆环域及相应的矩形域

1.2 胶料流动的动量方程²

对偏心圆环流道中流动的胶料可作如下假定: 胶料属不可压缩幂律流动流体; 忽略惯性力和重力, 胶料在轴向(z 向)的流动是层流和等温流动; 忽略末端影响, 胶料与流道壁面无相对滑移。设胶料的流速为 u , 由上述假设条件得到直角坐标系中胶料流动的动量方程:

$$\begin{cases} \frac{1}{\mu} \cdot \frac{dp}{dz} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \text{边界条件: 在内外圆周壁上 } u = 0 \end{cases} \quad (6)$$

式中 μ 为胶料的表观粘度; dp/dz 为胶料轴向压力梯度, 等温流动时为常数。

为便于求解, 经坐标转换将式(6)变为双圆柱坐标系中胶料流动的动量方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = \frac{c}{\mu} \cdot \frac{dp}{dz} \cdot \frac{1}{(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^2} \\ u|_{\alpha=\alpha_1} = u|_{\alpha=\alpha_2} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

如图1所示, 根据求解域的对称性, 可以只求半个域的解, 但此时应附加一个边界条件:

$$\frac{\partial u}{\partial \beta} \Big|_{\beta=0\pi} = 0$$

在求出的流速分布数据中, 偏心圆环流道中的宽隙和窄隙处的平均流速 u_2 和 u_1 最为重要, 即应求出 $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$, $\beta = 0$ 和 $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$, $\beta = \pi$ 这2个区段内各点流速的平均值 u_2 和 u_1 。

2 幂律流动胶料在偏心圆环流道中流场的计

算

牛顿流动流体在偏心圆环流道中的流速具有解析解^[3], 将牛顿流动流体的流动数据代入式(7)计算并与解析解比较得出, 牛顿流动流体在弯管机头中流场的解析解与数值解吻合, 这说明有限差分法的计算结果正确, 能满足所需的精度, 因此可以用有限差分法来求幂律流动胶料在偏心圆环流道中的流场。

2.1 建立有限差分方程

在如图1所示的离散化区域中, 将二阶中心差分公式代入式(7)得有限差分方程:

$$\begin{aligned} & A_{i,j} u_{(i-1),j} + B_{i,j} u_{(i+1),j} + \\ & C_{i,j} u_{i,(j-1)} + D_{i,j} u_{i,(j+1)} + \\ & E_{i,j} u_{i,j} = F_{i,j} \end{aligned} \quad (8)$$

$$A_{i,j} = \frac{\mu_{(i-\frac{1}{2}),j}}{2} \cdot \frac{2\Delta\beta}{\Delta\alpha} \quad (8a)$$

$$B_{i,j} = \frac{\mu_{(i+\frac{1}{2}),j}}{2} \cdot \frac{2\Delta\beta}{\Delta\alpha} \quad (8b)$$

$$C_{i,j} = \frac{\mu_{i,(j-\frac{1}{2})}}{2} \cdot \frac{2\Delta\alpha}{\Delta\beta} \quad (8c)$$

$$D_{i,j} = \frac{\mu_{i,(j+\frac{1}{2})}}{2} \cdot \frac{2\Delta\alpha}{\Delta\beta} \quad (8d)$$

$$E_{i,j} = -(A_{i,j} + B_{i,j} + C_{i,j} + D_{i,j}) \quad (8f)$$

$$F_{i,j} = \frac{1}{4} \cdot \frac{dp}{dz} \cdot \left(\frac{c}{\Psi_{i,j}}\right)^2 \cdot 4\Delta\alpha \cdot \Delta\beta \quad (8e)$$

$$\Psi_{i,j} = \operatorname{ch} \alpha_i - \cos \beta_j \quad (8g)$$

式(8)是一个典型的平面五点差分形式的差分方程。在图1所示的矩形区域内, 取 α 和 β 坐标方向上的相等增量 $\Delta\alpha$ 和 $\Delta\beta$ 来划分网格, 取 25×25 的结点可作出图2所示的离散矩形区图。

边界条件的处理及差分方程为:

$$u_{i,1} = u_{i,3} \quad (9)$$

$$u_{i,n} = u_{i,(n+2)} \quad (10)$$

$$u_{1,j} = 0 \quad (11)$$

$$u_{(n+2),j} = 0 \quad (12)$$

通过有限差分方程(8)~(12)就可求解动量方程。

2.2 计算方法说明

计算方法选用解二维问题的有效方法——逐行法^[4]。这是将一维状态的直接解法追赶法与高斯-塞德尔迭代法结合起来的一种方法。由于逐行法是在所选定的行内直接求出满足2

2.4 流量(Q)的计算

偏心圆环流道中的体积流率可以用各个小矩形内体积流率的总和来表示。在任何一个矩形域中, 平均流速 $u_{(i+\frac{1}{2}), (j+\frac{1}{2})}$ 和 Q 为:

$$u_{(i+\frac{1}{2}), (j+\frac{1}{2})} = \frac{1}{4} [u_{i,j} + u_{i,(j+1)} + u_{(i+1),(j+1)} + u_{(i+1),j}] \quad (17)$$

$$dQ = u_{(i+\frac{1}{2}), (j+\frac{1}{2})} \cdot S_{i,j} = u_{(i+\frac{1}{2}), (j+\frac{1}{2})} \cdot |\Delta\alpha \cdot \Delta\beta| \quad (18)$$

$$Q = 2|\Delta\alpha \cdot \Delta\beta| \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=2}^n u_{(i+\frac{1}{2}), (j+\frac{1}{2})} \quad (19)$$

根据上述公式编制了计算幂律流动胶料在偏心圆环流道宽隙和窄隙处流速分布、平均流速和流速比的简明计算程序。胶料流速比和 Q 的计算结果见表 1。

表 1 幂律流动胶料在偏心圆环流道宽隙和窄隙处的流速比和 Q 的计算结果

项 目	e/mm						
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
流速比							
u_2/u_1	1.07	1.13	1.21	1.29	1.37	1.43	1.56
$Q \times 10^8 / (m^3 \cdot s^{-1})$	1.41	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.35

注: 弯管挤出机头参数: $r_1 = 9.5 \text{ mm}$, $r_2 = 13.5 \text{ mm}$, $n = 0.21$ 。

3 弯管挤出试验

弯管挤出试验采用弯管试验机头和 $\Phi 65$ 挤出机配合进行; 试验条件为: 机头温度为 $95 \sim 110 \text{ }^\circ\text{C}$, 螺杆转速为 $16, 20$ 和 $25 \text{ r} \cdot \text{min}^{-1}$; 试验胶料为短纤维胶料。在孟山都流变仪(毛细管直径为 1.51 mm 、长径比为 20)上测得: 温度为 $90 \text{ }^\circ\text{C}$ 时, 胶料的 $n = 0.19$, $m = 1.58 \times 10^5 \text{ Pa} \cdot \text{s}^{0.19} \cdot \text{m}^{-2}$; 温度为 $100 \text{ }^\circ\text{C}$ 时, 胶料的 $n = 0.21$, $m = 1.15 \times 10^5 \text{ Pa} \cdot \text{s}^{0.21} \cdot \text{m}^{-2}$ 。

试验过程为: 在某一螺杆转速下, 确定 e (由小到大调整), 挤出弯管, 弯管切断后迅速放入水中冷却定型, 定型后测定弯管弯曲半径 R , 结果见图 3。从图 3 看出, 幂律流动胶料在偏心圆环流道中的挤出试验结果与用有限差分

法的数值计算结果基本吻合, 二者不能完全吻合的原因, 一是挤出温度略有波动, 即弯管挤出时的温度略低于开始挤出时的温度; 二是对挤出机的偏心测量和弯管弯曲半径的测量有误差。试验结果说明用有限差分法求解幂律流动胶料在偏心圆环流道中的流场是正确的。

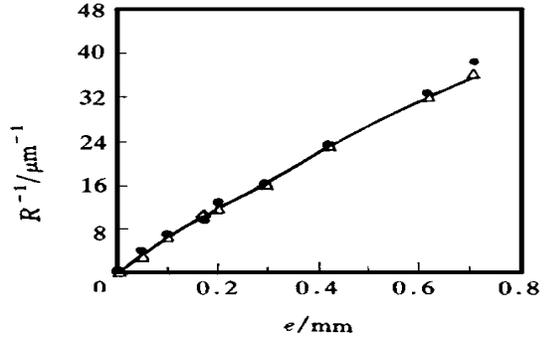


图 3 弯管挤出试验与计算结果的比较

● — 试验; △ — 计算

4 结论

(1) 用有限差分法计算橡胶弯管胶料在挤出流道中的流场, 应采用双圆柱坐标系, 并将弯管流道的偏心圆环域变成规则矩形域。

(2) 弯管流道中幂律流动胶料的速度梯度变化由表观粘度反应出来, 表观粘度采用中心差分法计算效果较好。

(3) 有限差分法的数值计算结果与弯管挤出的试验结果基本吻合。

用有限差分法精确计算橡胶弯管胶料在挤出流道中的流场, 为进一步研究橡胶弯管的挤出规律提供了量化基础。

参考文献

- 何 红. 橡胶弯管挤出成型规律及机头研究: [硕士学位论文]. 北京: 北京化工学院, 1991
- 李希平. 双圆柱坐标及其在偏心圆环域内流动的应用. 北京化工学院学报, 1989, 16(1): 93
- Snyder W T, Goldstein G Z. Analysis of fully developed laminar flow in an eccentric annulus. American Institute of Chemical Engineer, 1965, 11(3): 462
- 帕斯卡 S V. 传热与流体流动的数值计算. 张 政译. 北京: 科学出版社, 1984. 74

收稿日期 1998-10-17

Application of Finite Difference Method to Calculating Flow Field in Extrusion Runner of Curved Rubber Hose

He Hong

(Beijing University of Chemical Technology 100029)

Abstract The flow field of a power-law fluid in extrusion runner of curved rubber hose was calculated with the finite difference method. The results showed that as for calculating the axial laminar flow of power-law fluid, the bicylindrical coordinates could be chosen to transform the eccentric annular region to the simple rectangular region; the flow velocity ratio of the wide and narrow sides in curved hose could be obtained by calculating the velocity field using plane finite difference method; and the calculated results were basically in accordance with the measured ones.

Keywords curved rubber hose, extrusion flow field, finite difference method, bicylindrical coordinates, eccentric annular region, rectangular region

川橡集团公司研制出新型加强轮胎

四川川橡集团公司为提高其生产的“天府”、“银露”两个品牌轮胎在超载、高速使用条件下的性能,经过两年多的深入研究和试验,对胶料配方和施工设计等进行了重大调整,研制出新型加强轮胎。

该轮胎高速性能稳定在 $100 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, 耐久性可达 200 h, 这一指标大大超过了国家 A 级产品的标准。该产品的胎圈以两倍于标准负荷进行试验, 可达到 200 h 不损坏; 在实际行驶里程方面, 9.00—20 16PR 加强轮胎在河南地区进行试验, 耐磨性比以前提高 20% 以上, 综合行驶里程(磨损至剩余花纹 2 mm 时)可达 8 万公里。

(四川川橡集团公司计企科 王建斌供稿)

中阿合建 100 万套轮胎项目签约

由桂林橡胶工业设计研究院承担设计、中国与阿联酋合作建设的年产 100 万套轮胎项目——意特拉特轮胎生产建设项目, 日前已正式签约。

该项目总投资额为 5 300 万美元, 其中中方 3 家公司以各自劳务及科研成果入股。他们是桂林橡胶工业设计研究院以科技成果投资, 湖南海外国际合作有限公司承担建设任务, 上海江汇直轮胎橡胶科贸有限公司提供管理软

件。

(摘自《中国化工报》, 1998-12-01)

一种 ACM 专用防老剂在成都研制成功

一种适合国产 ACM 在高温条件下使用的专用防老剂, 在成都青龙特种橡胶研究所研制成功。该产品由苯胺化合物等原料经多元复合而成, 在 $175 \sim 200 \text{ }^\circ\text{C}$ 的条件下, 具有良好的防老化性能, 防老化效果明显优于通用防老剂 D, BLE, 4010 和 SP-C 等, 适用于不同耐寒等级的 ACM。

(摘自《中国化工报》, 1998-12-01)

扬中建立硅橡胶厂

英国《欧洲橡胶杂志》1998 年 180 卷 10 期 18 页报道:

扬中有机氟集团在江苏省扬中市建立了一座硅橡胶厂。该厂将是中国最大的硅橡胶厂, 开始年产量为 1 500 t, 但一年后产量可翻番。据报道该厂总投资为 5 300 万元。

该厂附近还将建一座导电硅橡胶键盘厂, 每年可消耗 500 t 硅橡胶。

到“九五”计划末, 该厂可达到年产 1 万 t 硅橡胶的生产能力, 每年总产值可达 25 亿元人民币。

(涂学忠译)