子午线轮胎胎冠刚度的计算*

崔胜民**　余　群

(北京农业工程大学　100083)

摘要　根据复合材料结构力学理论，推导出了用于计算子午线轮胎胎冠刚度的通用数学模型。利用该数学模型可以计算不同类型的子午线轮胎胎冠刚度，并据此分析胎体结构和带束层结构对胎冠刚度的影响。介绍了胎冠刚度在计算轮胎印迹内垂直载荷分布中的应用。

关键词　子午线轮胎，胎冠刚度，数学模型，复合材料，带束层

在对轮胎力学性能进行微观研究时，如何计算轮胎胎冠刚度非常重要。子午线轮胎主要是由胎体、带束层和胎面所构成。由于胎体和带束层都是由弹性模量较高的帘线和橡胶复合而成，因此子午线轮胎胎冠刚度主要取决于胎体和带束层的结构形式及骨架材料的性能。子午线轮胎的带束层有二层、四层、六层不等，带束层层数不同，胎冠刚度的数学模型也不同。

本文目的是为了建立带束层为偶数的子午线轮胎胎冠刚度计算的数学模型，可为进一步研究轮胎力学性能奠定基础。

1　子午线轮胎胎冠刚度数学模型

轮胎受力产生复合变形时，复合层的力、力矩和曲率与中曲面应变之间的关系可用式(1)表示：

$$
\begin{Bmatrix} N_X \\ N_Y \\ N_{XY} \\ M_X \\ M_Y \\ M_{XY} \end{Bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
A_{XX} & A_{XY} & A_{XS} & B_{XX} & B_{XY} & B_{XS} \\
A_{XY} & A_{YY} & A_{YS} & B_{XY} & B_{YY} & B_{YS} \\
A_{XS} & A_{YS} & A_{SS} & B_{XS} & B_{YS} & B_{SS} \\
B_{XX} & B_{XY} & B_{XS} & D_{XX} & D_{XY} & D_{XS} \\
B_{XY} & B_{YY} & B_{YS} & D_{XY} & D_{YY} & D_{YS} \\
B_{XS} & B_{YS} & B_{SS} & D_{XS} & D_{YS} & D_{SS}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \gamma_{XY} \\ k_X \\ k_Y \\ k_{XY} \end{Bmatrix}
\tag{1}
$$

式中　N_X——单位长度上沿 X 轴的面内作用力；

N_Y——单位长度上沿 Y 轴的面内作用力；

N_{XY}——单位长度上的 XOY 面内剪切力；

M_X——单位长度上绕 X 轴的横截面弯矩；

M_Y——单位长度上绕 Y 轴的横截面弯矩；

M_{XY}——单位长度上的 XOY 面上的扭矩；

ε_X——X 方向应变；

ε_Y——Y 方向应变；

γ_{XY}——XOY 面上的剪切应变；

k_X——X 方向的曲率变化；

k_Y——Y 方向的曲率变化；

k_{XY}——XOY 面上的扭转变化；

A_{ij}——复合材料结构的伸张刚度；

B_{ij}——复合材料结构的弯曲-伸张刚度；

* 系博士点基金资助课题

** 现在在山东工程学院(淄博)工作

D_{ij}——复合材料结构的弯曲刚度。

$(ij=XX,XY,XS,YY,YS,SS)$

图1是轮胎胎冠部的横向断面结构放大图。假设胎体帘线作径向排列，胎体中帘线和橡胶所占的体积百分数分别为 $\overline{V}_f$ 和 $\overline{V}_m$；带束层中的帘线角度为 $\pm\beta$。根据艾凯厄尔(Ekavall)法[1]，轮胎胎体的宏观纵向（X 方向）的弹性模量 $\overline{E}_1$ 和宏观横向（Y 方向）的弹性模量 $\overline{E}_2$ 分别为：

$$\begin{aligned}\overline{E}_1 &= \overline{V}_f\overline{E}_f + \overline{V}_m E_m \\ \overline{E}_2 &= \overline{E}_f E_m/[\overline{V}_f E_m + \overline{V}_m\overline{E}_f(1-\nu_m^2)]\end{aligned} \tag{2}$$

式中 $\overline{E}_f$——胎体帘线的弹性模量；

E_m——橡胶的弹性模量；

ν_m——橡胶的泊松比。

胎体的泊松比 $\bar{\nu}_{12}$ 和 $\bar{\nu}_{21}$ 及剪切模量 $\overline{G}_{12}$ 分别为：

$$\begin{cases}\bar{\nu}_{12} = \overline{V}_f\bar{\nu}_f - \overline{V}_m\nu_m \\ \bar{\nu}_{21} = \overline{E}_2\bar{\nu}_{12}/\overline{E}_1\end{cases} \tag{3}$$

$$\overline{G}_{12} = G_m\overline{G}_f/(\overline{V}_f G_m + \overline{V}_m\overline{G}_f) \tag{4}$$

式中 $\bar{\nu}_f$——胎体帘线的泊松比；

$\overline{G}_f$——胎体帘线的剪切模量；

G_m——橡胶的剪切模量。

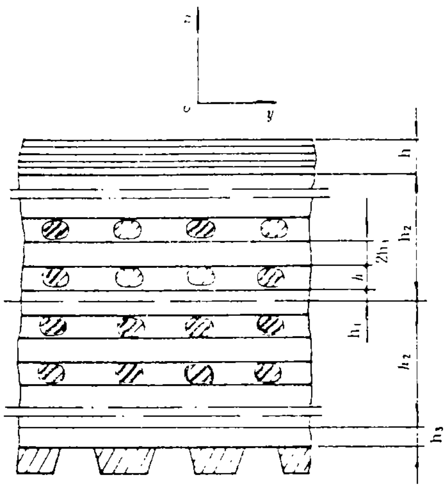


图1 轮胎胎冠部横向断面结构

$\bar{h}$—胎体厚度；h—带束层帘线直径；$2h_1$—带束层之间的橡胶隔离层厚度；h_2—中心橡胶隔离层中线至胎肩距离；h_3—带束层总厚度减去 $2h_1$

带束层的宏观纵向弹性模量 E_1 和宏观横向弹性模量 E_2 分别为：

$$\begin{cases}E_1 = V_f E_f + V_m E_m \\ E_2 = E_f E_m/[V_f E_m + V_m E_f(1-\nu_m^2)]\end{cases} \tag{5}$$

式中 E_f——带束层帘线的弹性模量。

带束层的泊松比和剪切模量分别为：

$$\begin{cases}\nu_{12} = V_f\nu_f + V_m\nu_m \\ \nu_{21} = E_2\nu_{12}/E_1\end{cases} \tag{6}$$

$$G_{12} = G_m G_f/(V_f G_m + V_m G_f) \tag{7}$$

式中 ν_f——带束层帘线的泊松比；

G_f——带束层帘线的剪切模量。

橡胶隔离层的宏观纵向弹性模量 E_1' 和宏观横向弹性模量 E_2' 及剪切模量 G_{12}' 分别为：

$$E_1' = E_2' = E_m/(1-\nu_m^2) \tag{8}$$

$$G_{12}' = 0.5E_m/(1+\nu_m) \tag{9}$$

胎体帘线、带束层帘线和橡胶的剪切模量与它们各自的弹性模量和泊松比之间的关系为：

$$\begin{cases}\overline{G}_f = 0.5\overline{E}_f/(1+\bar{\nu}_f) \\ G_f = 0.5E_f/(1+\nu_f) \\ G_m = 0.5E_m/(1+\nu_m)\end{cases} \tag{10}$$

复合材料板的刚度与其结构的关系[2]为：

$$\begin{cases}A_{ij} = \sum\limits_{-P}^{P}[\overline{C}_{ij}]_k h_k \\ B_{ij} = \sum\limits_{-P}^{P}[\overline{C}_{ij}]_k h_k d_k \\ D_{ij} = \sum\limits_{-P}^{P}[\overline{C}_{ij}]_k (h_k d_k^2 + h_k^3/12)\end{cases} \tag{11}$$

式中 h_k——第 k 铺设层厚度；

d_k——层合材料几何中心面到第 k 铺设层中心的距离；

$\overline{C}_{ij}$——转换刚度系数。

$P=(n-1)/2$

式中 n——复合材料中铺设层的总层数。

转换刚度系数 $\overline{C}_{ij}$ 与复合材料主方向的刚度系数 C_{ij} 有如下关系：

$$\begin{aligned}\overline{C}_{XX} = C_{11}\cos^4\beta + 2(C_{12}+2C_{66}) \\ \sin^2\beta\cos^2\beta + C_{22}\sin^4\beta\end{aligned}$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
\bar{C}_{XY} &= (C_{11} + C_{22} - 4C_{66})\sin^2\beta\cos^2\beta \\
&\quad + C_{12}(\sin^4\beta + \cos^4\beta) \\
\bar{C}_{YY} &= C_{11}\sin^4\beta + 2(C_{12} + 2C_{66})\sin^2\beta\cos^2\beta \\
&\quad + C_{22}cos^4\beta \\
\bar{C}_{XS} &= (C_{11} - C_{22} - 2C_{66})\sin\beta\cos^3\beta \\
&\quad + (C_{11} - C_{22} + 2C_{66})\sin^3\beta\cos\beta \\
\bar{C}_{YS} &= (C_{11} - C_{22} - 2C_{66})\sin^3\beta\cos\beta \\
&\quad + (C_{12} - C_{22} + 2C_{66})\sin\beta\cos^3\beta \\
\bar{C}_{SS} &= (C_{11} + C_{22} - 2C_{12} - 2C_{66})\sin^2\beta\cos^2\beta \\
&\quad + C_{66}(\sin^4\beta + \cos^4\beta)
\end{aligned}
\right. \tag{12}
$$

式中　$C_{11} = E_X/(1 - \nu_{XY}\nu_{YX})$；

$C_{22} = E_Y/(1 - \nu_{XY}\nu_{YX})$；

$C_{12} = \nu_{XY}C_{22}$；

$C_{66} = G_{XY}$；

E_X——复合材料在宏观纵向上的弹性模量；

E_Y——复合材料在宏观横向上的弹性模量；

ν_{XY}, ν_{YX}——复合材料泊松比；

G_{XY}——复合材料剪切模量。

根据式(12)可求得子午线轮胎胎体的转换刚度系数 $\bar{C}_{Tij}$ 为：

$$
\left\{
\begin{aligned}
\bar{C}_{TXX} &= \bar{E}_2/(1 - \bar{\nu}_{12}\bar{\nu}_{21}) \\
\bar{C}_{TXY} &= \bar{\nu}_{12}\bar{C}_{TXX} \\
\bar{C}_{TYY} &= \bar{E}_1/(1 - \bar{\nu}_{12}\bar{\nu}_{21}) \\
\bar{C}_{TSS} &= \bar{G}_{12} \\
\bar{C}_{TXS} &= \bar{C}_{TYS} = 0
\end{aligned}
\right. \tag{13}
$$

子午线轮胎带束层的转换刚度系数 $\bar{C}_{Dij}$ 为：

$$
\left\{
\begin{aligned}
\bar{C}_{DXX} &= (E_1\cos^4\beta + E_2\sin^4\beta)/(1 - \nu_{12}\nu_{21}) \\
&\quad + 2[(\nu_{12}E_2)/(1 - \nu_{12}\nu_{21}) \\
&\quad + 2G_{12}]\sin^2\beta\cos^2\beta \\
\bar{C}_{DXY} &= \nu_{12}E_2(\sin^4\beta + \cos^4\beta)/(1 - \nu_{12}\nu_{21}) \\
&\quad + [E_1E_2/(1 - \nu_{12}\nu_{21}) - 4G_{12}]\sin^2\beta\cos^2\beta \\
\bar{C}_{DYY} &= (E_1\sin^4\beta + \bar{E}_2\cos^4\beta)/(1 - \nu_{12}\nu_{21}) \\
&\quad + 2[\nu_{12}E_2/(1 - \nu_{12}\nu_{21}) + 2G_{12}]\sin^2\beta\cos^2\beta \\
\bar{C}_{DXS} &= [(E_1 + E_2)/(1 - \nu_{12}\nu_{21}) \\
&\quad - 2G_{12}]\sin\beta\cos^3\beta + [E_2(\nu_{21} - 1)/ \\
&\quad (1 - \nu_{12}\nu_{21}) + 2G_{12}]\sin^3\beta\cos\beta \\
\bar{C}_{DYS} &= [(E_1 + E_2)/(1 - \nu_{12}\nu_{21}) \\
&\quad - 2G_{12}]\sin^3\beta\cos\beta + [E_2(\nu_{21} - 1)/ \\
&\quad (1 - \nu_{12}\nu_{21}) + 2G_{12}]\sin\beta\cos^3\beta \\
\bar{C}_{DSS} &= [(E_1 + E_2 - 2\nu_{12}E_2)/(1 - \nu_{12}\nu_{21}) \\
&\quad - 2G_{12}]\sin^2\beta\cos^2\beta + G_{12}(\sin^4\beta + \cos^4\beta)
\end{aligned}
\right. \tag{14}
$$

橡胶隔离层的转换刚度系数 $\bar{C}_{mij}$ 为：

$$
\left\{
\begin{aligned}
\bar{C}_{mXX} &= C_{mYY} = E_1{}' \\
\bar{C}_{mXY} &= \nu_m E_1{}' \\
\bar{C}_{mSS} &= G_{12}{}' \\
\bar{C}_{mXS} &= C_{mYS} = 0
\end{aligned}
\right. \tag{15}
$$

根据图 1，将刚度公式(11)中的元素列于附表之中。

将附表中的各元素代入式(11)，可以推导出用于计算子午线轮胎胎冠部刚度的通用数学模型为：

$$
\left\{
\begin{aligned}
A_{ij} &= n_1\bar{C}_{Dij}h + \bar{C}_{mij}(2h_2 + h_3 - n_1h) \\
&\quad + \bar{C}_{Tij}\bar{h} \\
A_{XS} &= A_{YS} = 0 \\
B_{ij} &= \bar{C}_{Tij}\bar{h}(h_2 + \bar{h}/2) - \bar{C}_{mij}h_3(h_2 \\
&\quad + h_3/2) \\
B_{XS} &= - n_1\bar{C}_{DXS}h(2h_1 + h)/2 \\
B_{YS} &= - n_1\bar{C}_{DYS}h(2h_1 + h)/2 \\
D_{ij} &= \bar{C}_{Tij}\bar{h}[(h_2 + \bar{h}/2)^2 + \bar{h}^2/12] \\
&\quad + \bar{C}_{mij}(h_4 + h_5) + \bar{C}_{Dij}h_6 \\
D_{XS} &= D_{YS} = 0
\end{aligned}
\right. \tag{16}
$$

式中　$h_4 = h_1^3/3 + 4h_1\sum_{1}^{n_2}[n_2^2(2h_1 + h)^2 + h_1^2/3] + h_3[(h_2 + h_3/2)^2 + h_3^2/12] + [h_2 - (n_1 - 1)h_1 - n_1h/2]\{[h_2 + (n_1 - 1)h_1 + n_1h/2]^2 + [h_2 - (n_1 - 1)h_1 - n_1h/2]^2/6\}$；

$h_5 = 2\sum_{1}^{n_3}[(2n_3 - 1)(h_1 + h/2)^2 + h^2/12]$；

$n_2 = (n-2)/2$；$n_3 = n_1/2$；

n_1——带束层数；

n——层合材料中铺设层的总层数。

2　应用实例[3]

胎冠刚度对轮胎印迹内垂直载荷分布有

较大的影响。假设轮胎在平坦的硬路面上滚动时，带束层的印迹形状为矩形，其长度为

附表 刚度公式(11)各元素一览表

层别	$\bar{C}_{XX}$	$\bar{C}_{XY}$	$\bar{C}_{YY}$	$\bar{C}_{SS}$	$\bar{C}_{XS}$	$\bar{C}_{YS}$	h_k	d_k	β
$(n-1)/2$	$\bar{C}_{TXX}$	$\bar{C}_{TXY}$	$\bar{C}_{TYY}$	$\bar{C}_{TSS}$	0	0	$\bar{h}$	$h_2+\bar{h}/2$	90°
$(n-3)/2$	$\bar{C}_{mXX}$	$\bar{C}_{mXY}$	$\bar{C}_{mYY}$	$\bar{C}_{mSS}$	0	0	H_1	H_2	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
3	$\bar{C}_{DXX}$	$\bar{C}_{DXY}$	$\bar{C}_{DYY}$	$\bar{C}_{DSS}$	$\bar{C}_{DXS}$	$\bar{C}_{DYS}$	h	$3h_1+3h/2$	$-\beta$
2	$\bar{C}_{mXX}$	$\bar{C}_{mXY}$	$\bar{C}_{mYY}$	$\bar{C}_{mSS}$	0	0	$2h_1$	$2h_1+h$	
1	$\bar{C}_{DXX}$	$\bar{C}_{DXY}$	$\bar{C}_{DYY}$	$\bar{C}_{DSS}$	$\bar{C}_{DXS}$	$\bar{C}_{DYS}$	h	$h_1+h/2$	β
0	$\bar{C}_{mXX}$	$\bar{C}_{mXY}$	$\bar{C}_{mYY}$	$\bar{C}_{mSS}$	0	0	$2h_1$	0	
-1	$\bar{C}_{DXX}$	$\bar{C}_{DXY}$	$\bar{C}_{DYY}$	$\bar{C}_{DSS}$	$\bar{C}_{DXS}$	$\bar{C}_{DYS}$	h	$-(h_1+h)/2$	$-\beta$
2	$\bar{C}_{mXX}$	$\bar{C}_{mXY}$	$\bar{C}_{mYY}$	$\bar{C}_{mSS}$	0	0	$2h_1$	$-(2h_1+h)$	
-3	$\bar{C}_{DXX}$	$\bar{C}_{DXY}$	$\bar{C}_{DYY}$	$\bar{C}_{DSS}$	$\bar{C}_{DXS}$	$\bar{C}_{DYS}$	h	$-(3h_1+3h)/2$	β
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$-(n-3)/2$	$\bar{C}_{mXX}$	$\bar{C}_{mXY}$	$\bar{C}_{mYY}$	$\bar{C}_{mSS}$	0	0	H_1	$-H_2$	
$-(n-1)/2$	$\bar{C}_{mXX}$	$\bar{C}_{mXY}$	$\bar{C}_{mYY}$	$\bar{C}_{mSS}$	0	0	h_3	$-(h_2+h_3)/2$	

注：$H_1=h_2-(n_1-1)h_1-n_1h/2$；$H_2=[h_2+(n_1-1)h_1+n_1h/2]/2$。

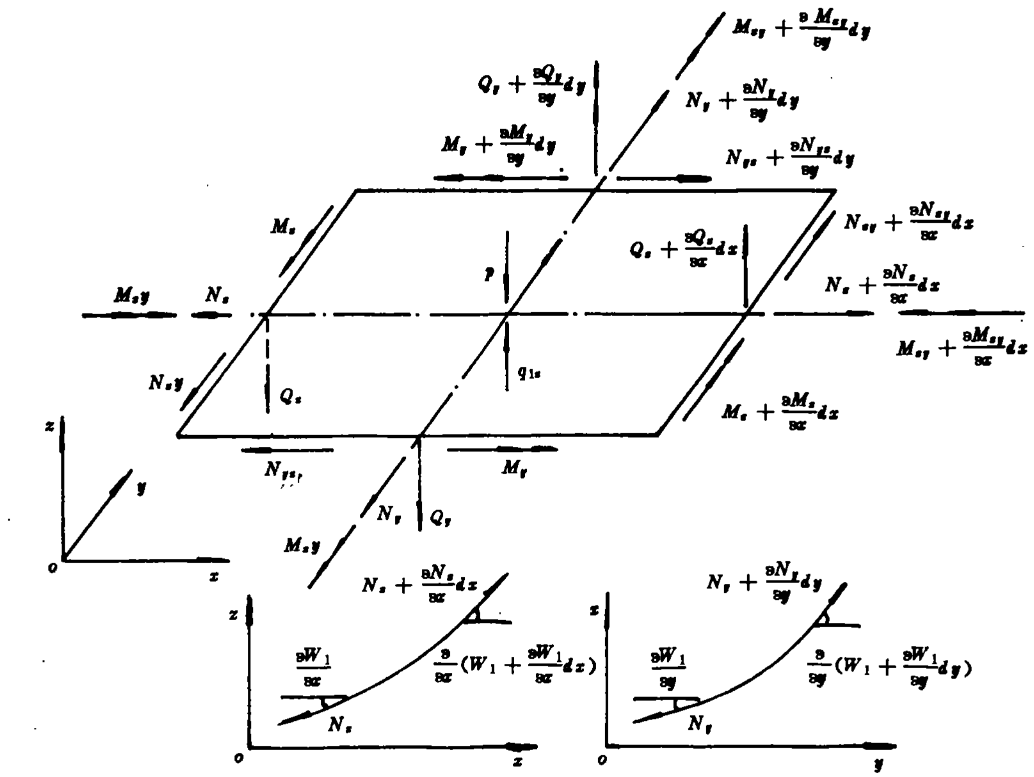


图 2 轮胎印迹内带束层某一微元件受力示意图

N_X、N_Y、N_{XY}、N_{YX}—微元件中面单位长度上的面内作用力；Q_X、Q_Y—微元件中面上的剪切力；M_X、M_Y、M_{XY}—微元件中面单位长度上的横截面的弯、扭力矩；q_{1Z}—Z 方向的应力；P—轮胎气压；ω_1—轮胎印迹内带束层的变形函数

$2L$，宽为$2B$。轮胎受外力主要有垂直力和纵向力，垂直力的大小等于轮胎的垂直载荷。轮胎在自由滚动时，纵向力为摩擦力；而在轮胎受制动时，纵向力则为制动力；轮胎受驱动时，纵向力又为驱动力。轮胎接地部分的变形可看成是由垂直力引起的变形和由纵向力引起的变形的简单叠加。首先假设纵向力等于零来分析轮胎接地部分的受力和变化。

图2为轮胎印迹内一微元件所受的全部力矢和矩矢示意图。

对微元件建立平衡方程式，可以得到：

$$-\frac{\partial^2 M_X}{\partial X^2}-2\frac{\partial^2 M_{XY}}{\partial X\partial Y}-\frac{\partial^2 M_Y}{\partial Y^2}=q_{IZ}-P+N_X\frac{\partial^2\omega_1}{\partial X^2}+2N_{XY}\frac{\partial^2\omega_1}{\partial X\partial Y}+N_Y\frac{\partial^2\omega_1}{\partial Y^2} \tag{17}$$

根据复合材料结构力学理论，各向异性板的弯曲力矩和变形函数之间的关系为：

$$\begin{bmatrix}M_X\\M_Y\\M_{XY}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}D_{XX}&D_{XY}&D_{XS}\\D_{XY}&D_{YY}&D_{YS}\\D_{XS}&D_{YS}&D_{SS}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\partial^2\omega_1/\partial X^2\\-\partial^2\omega_1/\partial Y^2\\-\partial^2\omega_1/\partial X\partial Y\end{bmatrix} \tag{18}$$

可以认为轮胎印迹内带束层是正交各向异性板，即：

$$D_{XY}=D_{YS}=0$$

如果忽略N_{XY}的影响，则将式(18)代入式(17)可得：

$$D_{XY}\frac{\partial^4\omega_1}{\partial X^4}+2(D_{XY}+2D_{SS})\frac{\partial^4\omega_1}{\partial X^2\partial Y^2}+D_{XY}\frac{\partial^4\omega_1}{\partial Y^4}$$
$$=q_{IZ}-P+N_X\frac{\partial^2\omega_1}{\partial X^2}+N_Y\frac{\partial^2\omega_1}{\partial Y^2} \tag{19}$$

在轮胎印迹内带束层$Y=\pm B$的边缘处，作用着从胎侧传来的作用力$\bar{k}_r\eta_1$（$\bar{k}_r$为胎侧的弹性常数，η_1为胎侧的径向变形），它与剪切力Q_Y相等，即：

$$Q_Y=\frac{\partial M_Y}{\partial Y}+\frac{\partial M_{XY}}{\partial X}=-\bar{k}_r\eta_1 \tag{20}$$

将式(18)代入式(20)可得：

$$(D_{XY}+2D_{SS})\frac{\partial^3\bar{\omega}_1}{\partial X^2\partial Y}+D_{YY}\frac{\partial^3\bar{\omega}_1}{\partial Y^3}=\bar{k}_r\eta_1 \tag{21}$$

式中　$\bar{\omega}_1=\omega_1(X,B)$

胎侧的径向变形可用下式近似地表示：

$$\eta_1=\bar{\omega}_1+\eta\cos(\pi X/2L) \tag{22}$$

设轮胎印迹内的垂直应力为：

$$q_{IZ}=k_m(\delta-\eta-\omega_1) \tag{23}$$

式中　k_m——胎面径向弹性常数；

δ——胎面最大垂直变形；

η——带束层分界点处最大垂直变形。

轮胎垂直负荷W可用下列关系式表示：

$$\overline{W}=4PLB+2Q_X+4\int_0^L\bar{k}_r\eta_1\mathrm{d}X \tag{24}$$
$$=4\int_0^B\int_0^L q_{IZ}\mathrm{d}X\mathrm{d}Y$$
$$=4k_m\int_0^B\int_0^L(\delta-\eta-\omega_1)\mathrm{d}X\mathrm{d}Y \tag{25}$$

假设轮胎印迹内带束层的变形函数为：

$$\omega_1(X,Y)=(a_1+a_2)\cos(\pi Y/2B)+a_3\cos(3\pi Y/2B)\cos(\pi X/2L) \tag{26}$$

它满足边界条件$\omega_1(\pm L,Y)=0$，a_1,a_2,a_3是特定系数。由式(26)可得：

$$\bar{\omega}_1(X)=\omega_1(X,B)$$
$$=a_1\cos(\pi X/2L) \tag{27}$$

定义：$q_V=\omega/4BL$

$q_m=k_m(\delta-n)$

由式(22)～(26)可得：

$$q_V=P+Q_X/2BL+[2\bar{k}_r(a_1+\eta)]/B\pi \tag{28}$$

$$q_m=q_V+4k_m/\pi[a_1/2+(q_2/\pi-a_3/3\pi] \tag{29}$$

$$q_{IZ}=q_m-k_m[a_1+a_2\cos(\pi Y/2B)+a_3\cos(3\pi Y/2B)]\cos(X/2L) \tag{30}$$

待定系数a_1,a_2和a_3可由伽辽金法确定。设$R_I(X,Y)$和$\overline{R}_I(X)$分别为式(19)和式(21)的内部残差，根据伽辽金法引入权函数：

$$\begin{cases}\rho_1=\cos(\pi X/2L)\\\rho_2=\cos(\pi X/2L)\cos(\pi X/2B)\end{cases} \tag{31}$$

则有：

$$\begin{cases}\int_O^B\int_0^L R_I(X,Y)\rho_1\mathrm{d}X\mathrm{d}Y=0\\\int_0^B\int_0^L R_I(X,Y)\rho_2\mathrm{d}X\mathrm{d}Y=0\\\int_0^L R_I(X)\rho_1 dX=0\end{cases} \tag{32}$$

对式(32)进行积分，可得到关于待定系数 a_1,a_2 和 a_3 的方程式：

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} \qquad (33)$$

式(33)中的 A_{ij} 和 $B_i(i,j=1,2,3)$ 的表达式略。

假设轮胎垂直载荷为零，求由纵向力引起的带束层的弯曲变形，如图 3 所示。设带束层的弯曲变形函数为 $\omega_2(X)$，带束层的弯曲平衡方程式为：

$$EI_j(\mathrm{d}^4\omega_2/\mathrm{d}X^4) - N_X(\mathrm{d}^2\omega_2/\mathrm{d}X^2) + 2Bk_m\omega_2 = 0 \qquad (34)$$

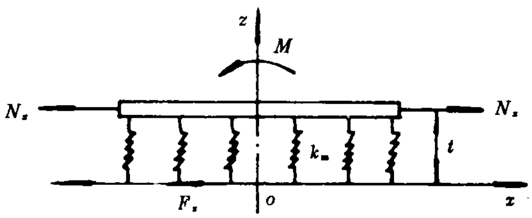


图 3 轮胎由纵向力引起的印迹内带束层弯曲变形

F_X—纵向力；M—带束层中心的弯曲力矩；N_X—带束层张力；t—带束层中面至地面距离

由式(34)可求由纵向力引起的带束层弯曲变形为：

$$\omega_2(X) = (F_X t)/(4\lambda_1\lambda_2 EI_Z)e^{-\lambda_1 X}\sin\lambda_2 X \qquad (35)$$

$$\lambda_1\lambda_2 = \sqrt[4]{\frac{k_m B}{2EI_Z}}\sqrt{1 \pm \frac{N_X}{\sqrt{8EI_Z k_m B}}}$$

由纵向力引起的轮胎印迹内垂直载荷分布的变化为：

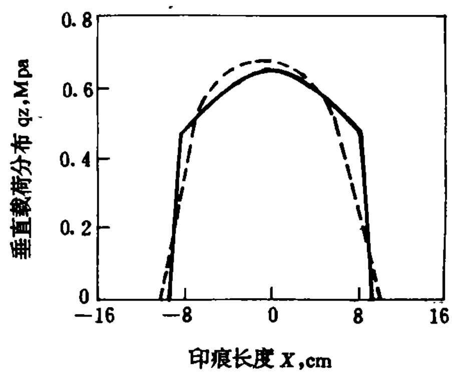
$$q_{2Z} = k_m\omega_2(X) = (k_m F_X t)/(4\lambda_1\lambda_2 EI_Z)e^{-X_1 X}\sin\lambda_2 X \qquad (36)$$

任意工况下的轮胎印迹内垂直载荷分布数学模型为：

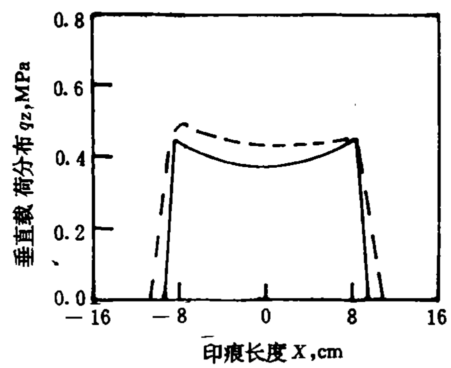
$$q_Z = \begin{cases} q_m(X+L')/(L'-L) & -L' \leqslant X < -L \\ q_{1Z}+q_{2Z} & -L \leqslant X < L \\ q_m(-X-L')/(L'-L) & L \leqslant X \leqslant L' \end{cases} \qquad (37)$$

式中 L'——轮胎印迹长度的二分之一。

利用上述所建的数学模型，对 6.50R16 轮胎印迹内垂直载荷分布进行了理论计算，并在长春汽车研究所轮胎试验台上进行了验证。图 4 为轮胎垂直载荷等于 6.24kN、气压等于 0.25MPa 时的 6.50R16 轮胎印迹内胎冠中心和胎肩处的垂直载荷分布理论结果与试验结果的比较。图中实线为理论结果，虚线为试验结果。可以看出，两者具有较好的一致性。



A. 胎肩



B. 胎冠中心

图 4 6.50R16 轮胎印迹内垂直载荷分布理论与试验结果比较

4　结论

利用本文建立的子午线轮胎胎冠刚度模型，可以根据胎体帘线和带束层帘线以及橡胶的弹性模量、泊松比和几何性质等，计算出不同类型子午线轮胎胎冠刚度，并能够分析胎体结构和带束层结构对其胎冠刚度的影响，为进一步分析轮胎力学性能奠定了基础。

参考文献

1　蔡四维，复合材料力学，76，人民交通出版社，北京，1987。

2　Akasaka, T. et al., Tire Science and Technology, 18 [2], 80(1990).

3　崔胜民，轮胎侧偏特性和汽车操纵稳定性模拟计算研究，北京农业工程大学博士学位论文，1993(未发表)。

（收稿日期　1992-11-07）
（收修改稿日期　1994-01-11）

Calculation of Stiffness in Crown Area of Radial Tyres

Cui Shengmin and Yu Qun
(Beijing University of Agricultural Egineering, 100083)

Abstract　A mathematic model is derived based on the theory of composite mechanics to calculate the stiffness in the crown area of radial tyres. using this model the stiffness in the crown area of various radial tyres can be calculated and the influence of the structure of carcass and belt on the stiffness in the crown area can be analysed. The application of the stiffness in the crown area is introduced in the calculation of the vertical load distribution in the footprint.

Keywords　radial tyres; stiffness in crown area; mathematic model; composite; belt

---

餐具托盘底层胶片试剂试制成功

上海东风橡胶三厂通过高苯乙烯树脂/天然橡胶/软丁腈橡胶并用，生产餐具托盘底层双面毛胶片获得成功，现介绍如下：

1　胶片规格及特点

厚 0.8mm，直径 300mm，底面两层均为毛面(面层与餐具接触，为规则毛面)，深棕色。

2　胶片性能

耐油，拉伸强度大于 11MPa，邵尔 A 型硬度为 77±2 度。

3　配方

胶片配方如下：高苯乙烯树脂　10；天然橡胶　25；软丁腈橡胶　65；氧化锌　5.0；硬脂酸　1.5；硫黄　2.2；促进剂 CZ　2.3；促进剂 TMTD　0.2；防老剂 A　1.8；白炭黑　22；碳酸镁　20；碳酸钙　80；石蜡　2.0；氧化铁红　4.4；炭黑　0.6；合计 242。含胶率为 41.3%。

4　生产工艺

(1)高苯乙烯树脂在开炼机上塑化(辊温 65～70℃，辊距 0.6mm)，薄通 3 次，下片待用。

(2)塑炼天然橡胶，一段胶可塑度(威氏)为 0.32～0.36，加入软丁腈橡胶翻炼，混合均匀，下片待用。

(3)将经塑炼的高苯乙烯树脂、天然橡胶和软丁腈橡胶翻炼均匀，在辊距 1mm 时薄通 7 次，下片。

(4)在辊温为 58～62℃的开炼机上，按常规混入各种配合剂。

(5)胶料底层垫毛衬布，面层用耐高温锦纶布，并涂隔离剂(硅油和皂水)，在鼓式硫化机上硫化。

该产品布纹清晰，色泽鲜艳，厚薄均匀，无小泡和明疤，可与国外同类产品相媲美。

(上海东风橡胶三厂　施凤笙供稿)