橡胶材料本构模型辨识方法改进

隋永强[1]，高　磊[2]，王晓凡[2]，王园园[1]，刘前进[2]，王养俊[2]

[1. 浦林成山（山东）轮胎股份有限公司，山东 荣成　264300；2. 吉林大学 汽车仿真与控制国家重点实验室，吉林 长春　130022]

摘要：根据橡胶材料辨识的数学公式推导，利用MATLAB软件通过最小二乘法拟合建立一种橡胶材料本构模型辨识编程计算方法，并与Abaqus有限元分析软件辨识工具进行对比分析。结果表明，相对Abaqus软件辨识工具，该计算方法使用条件较简单，拟合精度较高，可以满足大多数单轴拉伸试验数据的辨识与仿真需求，证实了利用MATLAB程序进行橡胶材料辨识方法的优越性。

关键词：轮胎；橡胶材料；单轴拉伸；本构模型；有限元分析

中图分类号：TQ336. 1；O241. 82　　**文章编号：**1006-8171（2019）12-0713-05

文献标志码：A　　**DOI：**10. 12135/j. issn. 1006-8171. 2019. 12. 0713

OSID开放科学标识码（扫码与作者交流）

有限元分析是如今工程结构力学分析中的常用方法，它利用数学近似方法对实际物理系统（几何约束与载荷设定）进行模拟计算。在进行有限元分析时，除结构还原及网格划分密度和质量外，对材料的属性定义也会直接影响仿真结果。橡胶材料本构模型选择和材料属性定义对轮胎力学特性有限元分析尤为重要。于海富等[1-5]进行了橡胶材料的本构模型研究，着重分析了橡胶材料的非线性和粘弹性等，并对常用的本构模型进行了分析。王永冠等[6-7]对橡胶材料本构模型选择和参数定义进行研究，明晰了各个橡胶本构模型的拟合精度和适用范围。在橡胶材料模型辨识方面，王登祥[8]在胶料有限元分析中运用数学方法进行推导，并用数学公式进行计算，但并没有进行验证和拟合方法的优化改善。本研究对橡胶材料的本构模型数学公式进行推导，运用MATLAB的拟合方法对得出的材料属性参数进行优化，得到较好的拟合结果，对实际工程有限元分析有重要意义。

1　橡胶材料及其常用模型介绍

橡胶是一种超弹性材料，具有良好的粘弹性[9]，其主要特点如下。

（1）非线性。橡胶材料具有三重非线性，即材料非线性、几何非线性和边界非线性。它的应力-应变关系具有极强的非线性，力学性能与环境条件、加载速率和应变历程等有很大的关联性，并且随着时间的延长不断发生变化。

（2）不可压缩性。橡胶材料的泊松比一般在0. 450～0. 499之间变化，接近于液体的0. 5，因此可以将其看作是一种体积近似不可压缩的材料。

（3）大变形性。橡胶材料弹性模量较小，变形很大，变形范围一般为200%～500%，有的甚至能达到1 000%，具有大变形的特性。

由此可见，对橡胶材料本构模型的研究很重要，大多数橡胶材料的本构模型都是应用应变能函数进行描述。几种常用的橡胶材料模型简要介绍如下。

1. 1　Mooney-Rivlin模型

Mooney-Rivlin模型是一个比较常用的模型，几乎可以模拟绝大多数橡胶材料的力学行为。其应变能密度（W）函数模型为

$$W=\sum_{i=j=1}^{N}C_{ij}(I_1-3)^i(I_2-3)^j+\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{d_k}(I_3^2-1)^{2k} \quad (1)$$

式中，I_i为右Cauchy-Green变形张量的第i不变量，C_{ij}和d为材料常数，由材料试验确定。

其典型的二项三阶展开式为

作者简介：隋永强（1983—），男，山东荣成人，浦林成山（山东）轮胎股份有限公司工程师，学士，主要从事轮胎结构设计与开发工作。

E-mail：1159696218@qq. com

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + \frac{1}{d}(J - 1)^2 \quad (2)$$

式中，C_{10}和C_{01}为材料常数，J为变形后与变形前的体积比，对于橡胶材料，由于其不可压缩的特性，J=1，由此得到的Mooney-Rivlin模型为

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) \quad (3)$$

Mooney-Rivlin模型适合于中小变形，一般适用于应变约为100%（拉伸状态）和30%（压缩状态）的情况，但是，该模型不能模拟多轴受力情况。对于未加填料的橡胶来说，该模型能够得到比较准确的拟合结果。

1.2 Yeoh模型

Yeoh模型比较适合描述添加填料的橡胶大变形的行为，可以用简单单轴拉伸的试验数据很好地预测其他变形行为，但是不能解释双轴拉伸的试验数据，较大变形时描述也不准确。

Yeoh模型是一种三次方程，该方程可以看作是Rivlin三次方程的简化，即

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 \quad (4)$$

式中，C_{20}和C_{30}为材料常数。

1.3 Neo-Hookean模型

Neo-Hookean模型是最常用的橡胶材料分子统计学本构模型。可压缩橡胶材料的Neo-Hookean应变能函数模型为

$$W = \frac{1}{2}\lambda(\ln J)^2 - \mu \ln J + \frac{1}{2}\mu(I_1 - 3) \quad (5)$$

式中，λ为伸长率，μ为材料的应力量纲常数。

不可压缩橡胶材料的Neo-Hookean应变能函数模型简化为

$$W = C_{10}(I_1 - 3) \quad (6)$$

Neo-Hookean模型具有常剪切模量，一般只适用于预测应变为30%～40%的单轴拉伸和应变为80%～90%的纯剪切条件下的橡胶力学行为。该模型的模拟精度较差，特别是大应变时，其优点是只有一个材料常数。

2 材料辨识方法对比

通过橡胶材料的拉伸试验可以得到应力-应变关系曲线，对得到的数据可以通过以下两种方式应用于有限元仿真中。

（1）应用Abaqus软件辨识工具，将应力-应变数据作为输入，辨识得到选定材料模型对应的参数，然后将此参数编写到inp文件中，作为材料属性附加到对应的单元集。

（2）使用MATLAB软件编程计算，通过此程序辨识应力-应变数据，得到选定材料模型对应的参数，然后将此参数编写到inp文件中，作为材料属性附加到对应的单元集。

第1种方法辨识速度较慢，只能通过多次输入材料的应力-应变数据得到相对应的材料模型参数，效率太低，花费时间较长，同时拟合精度相对MATLAB程序辨识也较低。因此，本研究提出一种使用MATLAB编程方式进行材料辨识优化的方法，使得到的材料参数更贴近实际。

2.1 辨识方法理论推导

2.1.1 弹性力学理论

应变能函数的表达式是$W=W(I_1+I_2+I_3)$，变形张量的应变量定义为

$$\begin{cases} I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ I_2 = (\lambda_1\lambda_2)^2 + (\lambda_2\lambda_3)^2 + (\lambda_3\lambda_1)^2 \\ I_3 = (\lambda_1\lambda_2\lambda_3)^2 \end{cases} \quad (7)$$

式中，λ的角标1，2，3分别表示相互垂直的3个方向，即x，y和z轴。

2.1.2 力学分析

Rivlin证明，对于纯均匀的应变，在应力、应变和应变能之间存在下列关系：

$$\begin{cases} \dfrac{t_1 - t_2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} = 2\left(\dfrac{\partial W}{\partial I_1} + \lambda_3^2 \dfrac{\partial W}{\partial I_2}\right) \\ \dfrac{t_1 - t_3}{\lambda_1^2 - \lambda_3^2} = 2\left(\dfrac{\partial W}{\partial I_1} + \lambda_2^2 \dfrac{\partial W}{\partial I_2}\right) \\ \dfrac{t_2 - t_3}{\lambda_2^2 - \lambda_3^2} = 2\left(\dfrac{\partial W}{\partial I_1} + \lambda_1^2 \dfrac{\partial W}{\partial I_2}\right) \end{cases} \quad (8)$$

式中，t为真实应力。

以单轴拉伸作为研究对象，在本次运算中假定橡胶材料是不可压缩的，可以得到

$$I_3 = (\lambda_1\lambda_2\lambda_3)^2 = 1 \quad (9)$$

单轴拉伸时，$\lambda_2=\lambda_3$，而对于中等伸长率，$\lambda=\lambda_0$（测定值），代入可以得到

$$I_3 = (\lambda_1\lambda_3^2)^2 = 1 \quad (10)$$

则

$$\lambda_3^2 = \lambda_2^2 = \lambda^{-1} \quad (11)$$

由此可以得到

$$I_1 - 3 = \lambda^2 + 2\lambda^{-1} - 3 \quad (12)$$

实际工程应力(单轴拉伸)$\sigma_1=\sigma$(实测值),其他两个方向应力为零。因此,对于真实应力,可以得到

$$\begin{cases} t_1=\sigma\lambda \\ t_2=t_3=0 \end{cases} \tag{13}$$

将上述关系式代入式(8)得到

$$\frac{\sigma\lambda_2}{\lambda^2-\lambda^{-1}}=2\left(\frac{\partial W}{\partial I_1}+\lambda_3^2\frac{\partial W}{\partial I_2}\right) \tag{14}$$

下面对3个材料模型分别进行公式推导(方法类似)。

(1) Mooney-Rivlin模型。其应变能函数为式(3),对函数分别进行求偏导可以得到

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial I_1}=C_{10} \\ \dfrac{\partial W}{\partial I_2}=C_{01} \end{cases} \tag{15}$$

代入式(14)可以得到其应力表达式:

$$\sigma=2(C_{10}+\lambda^{-1}C_{01})(\lambda-\lambda^{-2}) \tag{16}$$

(2) Yeoh模型。其应变能函数为式(4),对函数分别进行求导可以得到

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial I_1}=C_{10}+2C_{20}(I_1-3)+3C_{30}(I_1-3)^2 \\ \dfrac{\partial W}{\partial I_2}=0 \end{cases} \tag{17}$$

代入式(14)可以得到其应力表达式:

$$\sigma=[2C_{10}+4C_{20}(I_1-3)+6C_{30}(I_1-3)^2](\lambda-\lambda^{-2}) \tag{18}$$

(3) Neo-Hookean模型。其应变能函数为式(6),对函数分别进行求偏导可以得到

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial I_1}=2C_{10} \\ \dfrac{\partial W}{\partial I_2}=0 \end{cases} \tag{19}$$

代入式(14)可以得到其应力表达式:

$$\sigma=2C_{10}(\lambda-\lambda^{-2}) \tag{20}$$

对得到的应力表达式,计算出常数项C_{10},C_{20}和C_{30}即可。

2.2　两种辨识方法对比分析

上述公式建立后,利用MATLAB软件通过最小二乘法拟合进行编程,可以得到模型的材料常数。

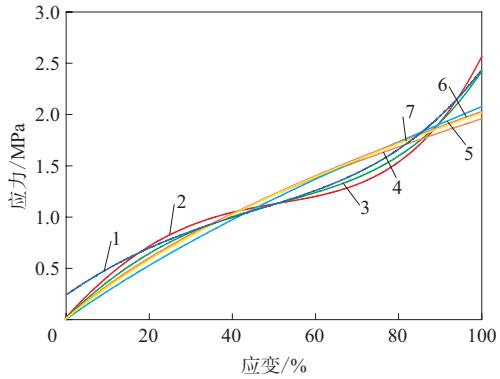
选择Yeoh,Mooney-Rivlin和Neo-Hookean橡胶材料模型,分别采用Abaqus辨识工具和MATLAB程序对6种同一轮胎不同部件胶料(编号为1#—6#)的应力-应变数据进行辨识,并与试验数据进行对比。结果如图1—6所示。

Abaqus软件材料模型辨识工具是对外封闭的,无法对其辨识的迭代次数和误差精度进行设置,可能会对橡胶材料模型的辨识精度产生一定影响。

从图1—6可以看出,使用MATLAB程序辨识的结果比使用Abaqus辨识工具更接近试验数据。这是因为使用MATLAB编程可以全面考虑各种影响因素,建立更准确的辨识程序,得到更精确的拟合参数。

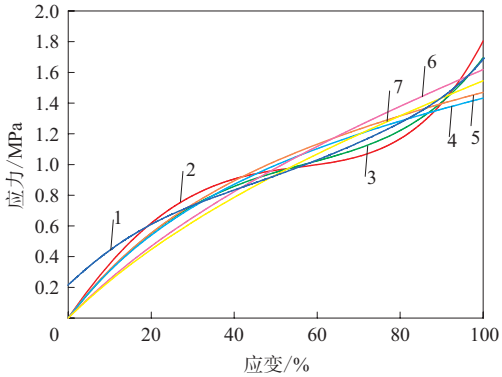
3　结论

相对Abaqus软件,通过最小二乘法拟合的基



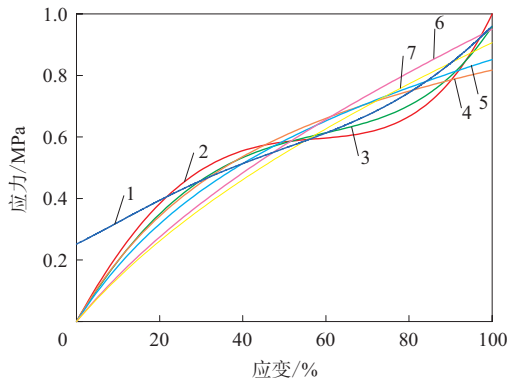
1—试验;2—Yeoh-Abaqus;3—Yeoh-MATLAB;4—Mooney-Rivlin-Abaqus;5—Mooney-Rivlin-MATLAB;6—Neo-Hookean-Abaqus;7—Neo-Hookean-MATLAB。

图1　1#胶料Abaqus与MATLAB辨识3种材料模型结果对比



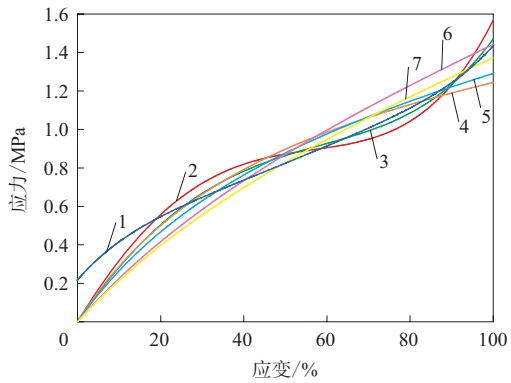
注同图1。

图2　2#胶料Abaqus与MATLAB辨识3种材料模型结果对比



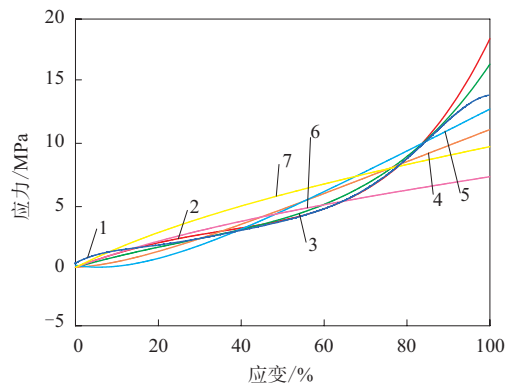
注同图1。

图3 3#胶料Abaqus与MATLAB辨识3种材料模型结果对比



注同图1。

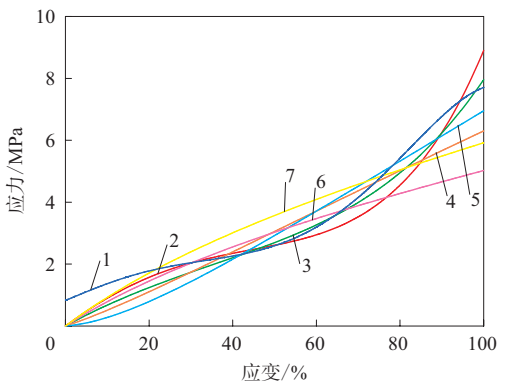
图4 4#胶料Abaqus与MATLAB辨识3种材料模型结果对比



注同图1。

图5 5#胶料Abaqus与MATLAB辨识3种材料模型结果对比

于MATLAB编程辨识得到的材料模型与试验数据更贴合，说明该辨识方法在效率和精度上都显著提高，以后可直接使用MATLAB程序进行橡胶材料模型辨识。



注同图1。

图6 6#胶料Abaqus与MATLAB辨识3种材料模型结果对比

本研究的公式推导和辨识结果仅是针对单轴拉伸试验数据进行的优化处理，后续将扩展更多的试验处理方法，囊括双轴拉伸和平面拉伸等，以便于提升有限元仿真的精度，使辨识得到的材料属性与实际材料更接近。

参考文献：

[1] 于海富，李凡珠，杨海波，等. 橡胶材料的混合高弹性本构模型研究[J]. 橡胶工业，2018，65(5)：509-513.

[2] 于海富，李凡珠，杨海波，等. 橡胶材料非线性高弹-粘弹性本构模型的研究[J]. 橡胶工业，2017，64(12)：719-723.

[3] 于海富. 橡胶材料本构方程的研究[D]. 北京：北京化工大学，2017.

[4] 张良，李忠华，马新强. 橡胶Mooney-Rivlin超弹性本构模型的参数特性研究[J]. 噪声与振动控制，2018，38(S2)：427-430.

[5] Yeoh O H. Characterization of Elastic Properties of Carbon Black Filled Rubber Vulcanizates[J]. Rubber Chemistry and Technology，1990，63(5)：792-805.

[6] 王永冠，李心，黄友剑. 橡胶计算中本构模型的选择[A]. “时代新材杯”第四届全国橡胶制品技术研讨会论文集[C]. 株洲：中国汽车工程学会，2007：443-449.

[7] 钱胜，陆益民，杨咸启，等. 橡胶材料超弹性本构模型选取及参数确定概述[J]. 橡胶科技，2018，16(5)：5-10.

[8] 王登祥. Tim Fry1轮胎有限元研究(FEA)进展及应用成果[J]. 轮胎工业，1998，18(7)：395-403.

[9] 王友善，王锋，王浩. 超弹性本构模型在轮胎有限元分析中的应用[J]. 轮胎工业，2009，29(5)：277-282.

收稿日期：2019-06-25

Improvement of Identification Method for Rubber Material Constitutive Model

SUI Yongqiang[1], *GAO Lei*[2], *WANG Xiaofan*[2], *WANG Yuanyuan*[1], *LIU Qianjin*[2], *WANG Yangjun*[2]
[1. Prinx Chenshan (Shandong) Tire Co., Ltd, Rongcheng 264300, China; 2. Jilin University, Changchun 130022, China]

Abstract: Based on the derivation of the mathematical formula of rubber material identification, a programming method of rubber material constitutive model identification was established by using the least square fitting method of MATLAB finite element analysis software, and compared with the identification tool of Abaqus software. The results showed that, compared with the identification tool of Abaqus software, the calculation method was simpler and had a relatively higher fitting accuracy, and it met the identification and simulation requirements of most uniaxial tensile test data. The superiority of rubber material indentification method using MATLAB program was confirmed.

Key words: tire; rubber material; uniaxial tension; constitutive model; finite element analysis

诺基亚为轻型卡车和SUV设计新豪华轮胎

美国《现代轮胎经销商》(www.moderntiredealer.com)2019年10月3日报道如下。

诺基亚轮胎公司为轻型卡车和SUV设计的新One HT豪华全天候轮胎(见图1)将在公司位于田纳西州代顿的新工厂生产。

图1　Nokian One HT轮胎

该轮胎将于2020年1月在北美推出,并主打北美市场。

公司称,Nokian One HT轮胎在所有条件下提供安全性能:加强雨天路面抓着性能;定制的胎面可最优化驾驶舒适性;平稳的冬季性能有助于在浅冰雪中行驶。

该公司称,Nokian One HT轮胎在全球范围内进行了严格测试,从芬兰伊瓦洛的诺基亚冬季测试跑道到南非的偏远地区,以及横跨北美的德克萨斯州的炎热地区、犹他州的山区和加利福尼亚州的城市中心。测试使轮胎具有高韧性、安全性和可持续性以及采用芳纶护甲(Aramid Armor)等创新,有助于抵御道路危险的破坏。

该斯堪的纳维亚公司表示,新轮胎的环保胶料可最大限度地降低滚动阻力,同时最大限度地提高驾驶舒适性。由于滚动阻力降低,Nokian One HT轮胎通过减少有害物质排放和降低燃油成本支持环保驾驶。

与诺基亚轮胎公司的所有产品一样,该高能效轮胎的胶料无有毒和致癌成分。其改进耐久和驾驶性能的其他创新如下。

• 芳纶胎侧技术:高强度芳纶纤维增强胎侧,提高耐久和防护性能,使胎侧更抗冲击和切割。

• 芳纶护甲技术:芳纶纤维增强轻型载重轮胎的胎面基部胶,加强抗刺扎防护,使轮胎免受道路灾害破坏。

• 加强制动抓着性能的疏通型刀槽花纹:胎面花纹设计突出湿地操纵和抓着性能,专为北美市场设计。

• 排石设计:花纹沟底的排石设计可最大化防止锋利岩石刺穿,并减少花纹沟飞石,保护胎体,延长轮胎的使用寿命。

• 曲折花纹沟和雪地路面用抓爪:借鉴冬季轮胎的该胎面技术可加强冬季条件下的抓着和稳定性能。该轮胎具有M+S标志,表示其性能在浅雪地上是可靠的。

(吴秀兰摘译　赵　敏校)