

子午线轮胎结构三维非线性分析 有限元程序 2.0 及应用

戴元坎 王章根

[上海轮胎橡胶(集团)股份有限公司轮胎研究所 200082]

摘要 介绍了子午线轮胎结构三维非线性分析有限元程序(3D Non-Linear Analysis Finite Element Program of Radial Tire,简称 FEPRT)2.0 中轮胎稳态滚动下的有限元分析计算、大变形增量法、整体坐标系-局部坐标系的转换公式、前处理程序、后处理程序及其对轮胎结构的实际分析计算结果。FEPRT 2.0 可用于充气轮胎自由状态、接地状态及稳态滚动下的结构分析计算。

关键词 子午线轮胎,三维非线性分析,有限元程序,结构,稳态滚动

轮胎是橡胶-帘线复合而成的结构体,不仅几何结构和材料性能为非线性,而且工作条件十分复杂,因此结构的设计难度很大。多年来,虽然先后出现了网络理论、薄膜理论、层合理论、薄壳理论等多种轮胎结构分析理论,但这些理论均有较大的局限性。近年来发展的有限元分析法却打破了这些理论的局限性,在轮胎结构分析中发挥了越来越大的作用,显示出不可比拟的优越性。

子午线轮胎结构三维非线性分析有限元分析程序(3D Non-Linear Analysis Finite Element Program of Radial Tire,简称 FEPRT)2.0 是在我所 FEPRT 1.0 基础上改进编制的。FEPRT 2.0 与 FEPRT 1.0 相比,除增加了轮胎稳态滚动下的有限元分析计算外,还对大变形增量法、材料的处理、前处理程序和后处理程序做了改进,现将 FEPRT 2.0 对轮胎结构的分析计算及应用简介如下。

1 轮胎稳态滚动下的有限元分析计算

FEPRT 1.0 只能对轮胎的静态做分析计算,而稳态滚动才是轮胎最基本的工作状态,即在正常条件下轮胎在其使用寿命的大部分时间内都是做稳态滚动,因此稳态滚动下轮胎结构的分析计算十分重要。为此,在 FEPRT 2.0 中

增加了稳态滚动下轮胎的分析计算有限元程序^[1,2]。

对稳态滚动分析计算,按 Faria L O 的方法,引进中介构形和中介坐标矢量 y , y 和初始构形中的质点矢量 a 有如下关系:

$$a = [R]^T y$$

式中, $[R]$ 为旋转矩阵, T 表示转置。在角速度平行 z 轴时:

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

式中, t 为时间。若描述质点 a 运动的位置矢量 x 由 $x(a, t)$ 给出:

$$x = x(a, t)$$

定义矢量 (y, t) 为

$$(y, t) = x([R]^T y, t)$$

若用 σ 和 τ 表示初始构形和中介构形的第 1 类克希荷夫应力张量,则有

$$\tau = [R]^T \sigma$$

大变形物体的平衡方程为

$$\tau \cdot \nabla_y + p = \rho \ddot{y}$$

其分量形式为

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial(\tau_{ij})}{\partial y_j} + p = \rho \ddot{y}_i \quad (i=1,2,3)$$

式中, p 为体力矢量, $\rho \ddot{y}$ 为惯性力矢量, ρ 为密度, \ddot{y}_i 为 y_i 的二阶导数,即加速度。与上述平衡方程相对应的虚功方程为

$$\int_V u \cdot p dV + \int_{S_y} u \cdot q dA - \int_V u \cdot \rho \ddot{y} dV$$

作者简介 戴元坎,男,26岁。工程师。1997年毕业于华南理工大学材料科学与工程学院高分子材料专业,获硕士学位。从事轮胎结构的有限元分析计算工作。已发表论文4篇和译文1篇。

$$= E S_y dV$$

式中, S_y 为中介构形的第 2 类克希荷夫应力张量, q 为面力矢量, V 为物体的体积, A 为物体的表面积, E 为格林应变张量, u 为位移矢量。若令 $p = 0$, 就得到稳态滚动的虚功方程, 从而可得到稳态滚动的有限元系统的平衡方程。

“的分量”的表达式(“”为下式的主项, 接触边界条件也做了简化)为

$$\ddot{u}_i = - \frac{1}{\rho} \left[\sum_{u=1}^2 y_u \frac{\partial^2 u_i}{\partial y_u^2} + \sum_{u,v=1}^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial y_u \partial y_v} (y_u y_v - u \sum_{m=1}^2 y_m^2) \right] \quad (i = 1, 2, 3)$$

式中, y_u, y_v 和 y_m 为 y 的分量, u_i 为 (y, t) 的分量, u 为克朗内克符号。

$$u = \begin{cases} 1 & u = \\ 0 & u \end{cases}$$

若 $\ddot{u}_i = 0$, 即 $\ddot{u}_i = 0$, 就得到相应的静态分析方程。

2 大变形增量法

由于结构和材料的特殊性, 轮胎在工作过程中的非线性变形很大, 因此其结构分析不能用小变形理论, 而必须用大变形理论^[3]。FEPRT 2.0 的大变形增量法即为以初始构形为参考构形的 TL 法(即完全的拉格朗日法)。在 FEPRT 1.0 使用这种方法时, 加载为一步加载, 即第 1 步加载的充气压力和下沉量就为最后的气压和下沉量, 这对结构和材料非线性变形很大的轮胎来说是有局限性的。而 FEPRT 2.0 却将加载分为多步进行, 且在每一步加载过程中还使用修正的牛顿迭代法进行迭代计算。

设物体初始构形的坐标矢量为 X , 在 t 和 $(t + \Delta t)$ 的坐标矢量为 x 和 x , 相应的位移矢量为 u 和 u , 有

$$\begin{aligned} X &= \{ X_1, X_2, X_3 \}^T \\ x &= \{ x_1, x_2, x_3 \}^T \\ x &= \{ x_1, x_2, x_3 \}^T \\ u &= \{ u_1, u_2, u_3 \}^T \\ u &= \{ u_1, u_2, u_3 \}^T \end{aligned}$$

其中

$$u_i = x_i - X_i$$

$$u_i = x_i - X_i$$

从时刻 t 到 $(t + \Delta t)$ 的位移增量 u_i 为

$$u_i = u_i - u_i$$

时刻 t 和 $(t + \Delta t)$ 的格林应变矢量 E 和 E 为

$$E = [E_{11}, E_{22}, E_{33}, 2 E_{23}, 2 E_{31}, 2 E_{12}]^T$$

$$E = [E_{11}, E_{22}, E_{33}, 2 E_{23}, 2 E_{31}, 2 E_{12}]^T$$

分量 E_{ij} 和 E_{ij} 为

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right)$$

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial X_i} (u_j + u_j) + \frac{\partial}{\partial X_j} (u_i + u_i) \right) + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial X_i} (u_k + u_k) \frac{\partial}{\partial X_j} (u_k + u_k) \right]$$

令

$$E_{ij} = E_{ij} + E_{ij}$$

相对于初始构形, 定义时刻 t 和 $(t + \Delta t)$ 的克希荷夫应力矢量为 S 和 S , 那么 S 和 S 为

$$S = [S_{11}, S_{22}, S_{33}, 2 S_{23}, 2 S_{31}, 2 S_{12}]^T$$

$$S = [S_{11}, S_{22}, S_{33}, 2 S_{23}, 2 S_{31}, 2 S_{12}]^T$$

且可分解为

$$S_{ij} = S_{ij} + S_{ij}$$

本构方程及其增量形式为

$$S = [D] E$$

$$dS = [D_Q] dE$$

式中, $[D]$ 为弹性矩阵, $[D_Q]$ 为切线弹性矩阵。

$(t + \Delta t)$ 时刻的虚功方程可表示为

$$\int_V E^T S dV = \int_V u^T P_0 dV +$$

$$\int_{A_t} u^T q_0 dV$$

式中, A_t 为物体的边界表面积, P_0 和 q_0 分别为时刻 $(t + \Delta t)$ 的体力矢量和面力矢量:

$$P_0 = \{ P_{01}, P_{02}, P_{03} \}^T$$

$$q_0 = \{ q_{01}, q_{02}, q_{03} \}^T$$

考虑到某一增量载荷任意迭代步下节点位移增量 (Δu) 的任意性, 上式可变为

$$\int_V [B]^T S dV = \int_V [N]^T P_0 dV +$$

$$\int_{A_i} [N]^T q_0 dA$$

式中, $[B]$ 为应变-位移的转换矩阵, $[N]$ 为函数矩阵。

系统增量形式的平衡方程为

$$\left(\right) = \int_V [B]^T S dV + [K_S] + R_S - R = 0$$

式中, 为某一增量载荷下节点位移增量矢量, $[K_S]$ 为初应力矩阵, R_S 为时刻 t 应力场 S 的等效节点矢量, R 为时刻 $(t + \Delta t)$ 载荷的等效节点力矢量。

3 整体坐标系-局部坐标系的转换公式

子午线轮胎的带束层及胎体层均为帘线呈一定角度的橡胶-帘线复合材料。FEPR2.0 将其认为是正交各向异性材料, 因此在其本构关系中引入了整体坐标系-局部坐标系的转换

$$[F] = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & 2m_1n_1 & 2n_1l_1 & 2l_1m_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & 2m_2n_2 & 2n_2l_2 & 2l_2m_2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & 2m_3n_3 & 2n_3l_3 & 2l_3m_3 \\ l_2l_3 & m_2m_3 & n_2n_3 & m_2n_3 + m_3n_2 & n_2l_3 + n_3l_2 & l_2m_3 + l_3m_2 \\ l_3l_1 & m_3m_1 & n_3n_1 & m_3n_1 + m_1n_3 & n_3l_1 + n_1l_3 & l_3m_1 + l_1m_3 \\ l_1l_2 & m_1m_2 & n_1n_2 & m_1n_2 + m_2n_1 & n_1l_2 + n_2l_1 & l_1m_2 + l_2m_1 \end{bmatrix}$$

$$l_{ij} = \cos(x_i^l, x_j^x)$$

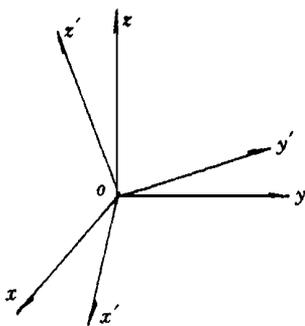


图1 整体坐标系与局部坐标系

$[F]$ 矩阵中, $l_1, l_2, l_3, m_1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3$ 为 σ_{xyz} 和 $\sigma_{x'y'z'}$ 坐标系间的方向余弦, 且有

$$\begin{aligned} l_1 &= \cos(x_1^l, x_1^x) & m_1 &= \cos(x_1^l, x_2^x) & n_1 &= \cos(x_1^l, x_3^x) \\ l_2 &= \cos(x_2^l, x_1^x) & m_2 &= \cos(x_2^l, x_2^x) & n_2 &= \cos(x_2^l, x_3^x) \\ l_3 &= \cos(x_3^l, x_1^x) & m_3 &= \cos(x_3^l, x_2^x) & n_3 &= \cos(x_3^l, x_3^x) \end{aligned}$$

l_{ij} 即为 σ_{xyz} 和 $\sigma_{x'y'z'}$ 坐标系间的方向余弦:

公式^[4,5]。这些转换公式通过几次转换后, 可以很方便地用于任意结构及各种帘线角度复合材料, 仅需在初始数据文件中输入材料参数及其帘线角度。

图1中, σ_{xyz} 为整体坐标系, $\sigma_{x'y'z'}$ 为局部坐标系。设 (x_1, x_2, x_3) 和 (x_1^l, x_2^l, x_3^l) 分别为 σ_{xyz} 和 $\sigma_{x'y'z'}$ 坐标系中 P 点的坐标, σ^x 与 σ^l 分别为 P 点在 σ_{xyz} 和 $\sigma_{x'y'z'}$ 坐标系中材料的应力与应变矢量:

$$\begin{aligned} \sigma^x &= [\sigma_1^x \ \sigma_2^x \ \sigma_3^x \ \sigma_4^x \ \sigma_5^x \ \sigma_6^x]^T \\ \sigma^l &= [\sigma_1^l \ \sigma_2^l \ \sigma_3^l \ \sigma_4^l \ \sigma_5^l \ \sigma_6^l]^T \\ \epsilon^l &= [\epsilon_1^l \ \epsilon_2^l \ \epsilon_3^l \ \epsilon_4^l \ \epsilon_5^l \ \epsilon_6^l]^T \end{aligned}$$

由 σ_{xyz} 坐标系到 $\sigma_{x'y'z'}$ 坐标系的应力、应变转换关系式为

$$\sigma^l = [F] \sigma^x, \quad \epsilon^l = [F]^{-T} \epsilon^x$$

$[F]$ 为变换矩阵:

设 $[D^l]$ 和 $[S^l]$ 为 $\sigma_{x'y'z'}$ 坐标系中材料的刚度矩阵和柔度矩阵, $[D^x]$ 与 $[S^x]$ 为 σ_{xyz} 坐标系中材料的刚度矩阵和柔度矩阵, 因

$$\sigma^l = [D^l] \epsilon^l, \quad \sigma^x = [D^x] \epsilon^x$$

通过矩阵运算可推出:

$$\begin{aligned} [D^x] &= [F]^{-1} [D^l] [F]^{-T} \\ [S^x] &= [F]^T [S^l] [F] \end{aligned}$$

上面两式即为 σ_{xyz} 和 $\sigma_{x'y'z'}$ 坐标系中的刚度矩阵和柔度矩阵转换公式。

4 前处理程序

本有限元计算程序的前处理方式有两种。一种是运用自带的可进行自动网格划分的前处理程序实现建模及初始数据的输入; 另一种则是结合我所原开发的另一个前处理程序 (PRO-FEA) 而设计的, 其先由 AUTOCAD 画出轮胎结构的二维网格图, 并生成二维网格单元、节点

及材料分布的初始数据,由有限元计算程序读入并转换为三维数据进行分析运算。相比之下,后一种方法更为实用,所建模型更为直观,便于改正,可以很方便地对不同规格轮胎结构及其它实体结构进行有限元分析运算,而无需对程序进行修改,这对于实际使用很有好处。

5 后处理程序

后处理程序是将有限元计算出的整体坐标系下的高斯积分点上的应力、应变数据结果通过 Fortran 程序及 Visual Basic (Quick Basic) 程序转换为局部坐标系下的单元节点上的应力及应变数据,再通过 Excel 图表处理软件将其绘成更为直观明了的应力、应变图。此外,轮胎变形前后的节点坐标及位移数据通过 Visual Basic 程序转换为 DXF 格式图形文件,最后在 AUTOCAD 中绘成图形输出。

6 结构分析计算实例

应用 FEPRT 2.0 分析计算某种规格轿车子午线轮胎(钢丝带束层角度为 68° ,尼龙带束层角度为 90° ,胎体层角度为 0°)在充气压力为 0.24 MPa 时的断面变形轮廓及各部件的应力和应变情况,结果如图 2~8 所示(图 6~8 中横

断面取点位置指的是有限元网格图中帘线在横断面上由对称中线沿子午线方向所取的节点位置)。

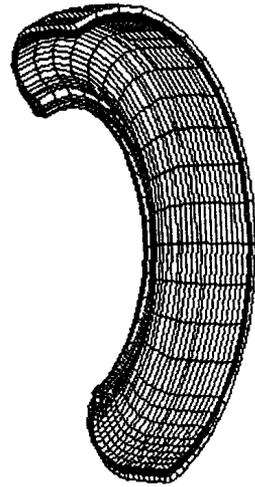


图 4 变形前三维有限元网格立体图

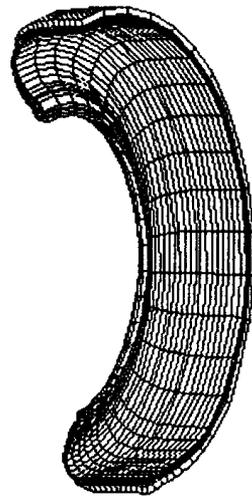


图 5 下沉量为 20 mm 时三维有限元网格立体图

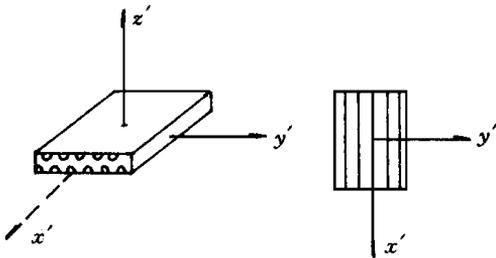


图 2 复合材料帘线的局部坐标系方向

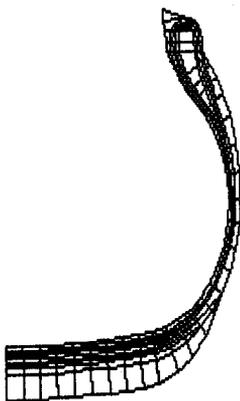


图 3 变形前横断面有限元网格图

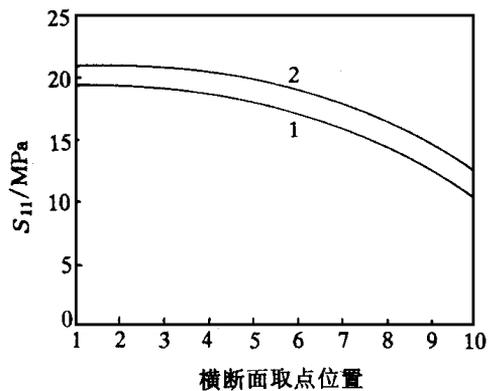


图 6 自由充气状态下钢丝带束层帘线在 x 轴方向的应力 S_{11}

1—FEPRT 2.0; 2—MARC 有限元程序

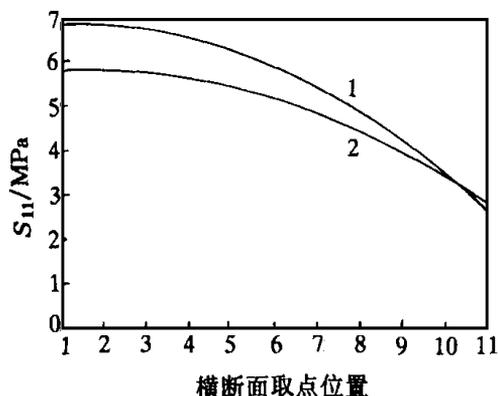


图7 自由充气状态下尼龙带束层帘线
在 x 轴方向的 S_{11}

注同图6

7 结语

EFPRT 2.0可用于自由充气状态、接地状态 and 稳态滚动下轮胎结构的分析计算,分析计算结果与 MARC 有限元程序较一致。

参考文献

- 1 Faria L O, Oden J T. Tire modeling by finite elements. *Tire Science and Technology*, 1992, 20(1): 33 ~ 56

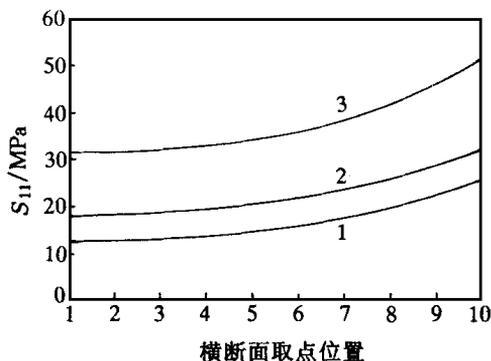


图8 下沉量为 20 mm 时不同滚动速度下钢丝
带束层帘线在 x 轴方向的 S_{11}

滚动速度为: 1—0; 2—100 $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$; 3—200 $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$

- 2 殷有泉. 固体力学非线性有限元引论. 北京:清华大学出版社, 1988. 160 ~ 184
- 3 周 履, 范赋群. 复合材料力学. 北京:高等教育出版社, 1991. 324 ~ 330
- 4 丁皓江, 谢贻权, 何福保, 等. 弹性和塑性力学中的有限单元法. 北京:机械工业出版社, 1989. 118 ~ 120
- 5 戴元坎. 子午线轮胎接触问题的有限元分析与研究: [硕士学位论文]. 广州:华南理工大学材料科学与工程学院高分子系, 1997

第十届全国轮胎技术研讨会论文

3D Non-linear Analytic Finite Element Program of Radial Tire —Version 2.0 and Its Application

Dai Yuankan and Wang Zhanggen

[Shanghai Tire and Rubber (Group) Co., Ltd. 200082]

Abstract The finite element analysis and calculation of steady-rolling tire, the large deformation increment method, the whole coordinate/local coordinate transform formula, the pre-process program and the post-process program in 3D Non-linear Analytic Finite Element Program of Radial Tire — Version 2.0 (hereafter referred as FEPR 2.0) are described and the results of practical analysis and calculation are given. FEPR 2.0 can be used to analyse and calculate the structure of inflated tire under free load, ground-contact and steady-rolling conditions respectively.

Keywords radial tire, 3D non-linear analysis, finite element program, structure, steady-rolling

国家 2000 年汽车产品质量目标

汽车平均故障间隔时间: 轿车 15 000 km, 客车 12 000 km, 载货汽车 10 000 km, 新开发设计产品 15 000 ~ 20 000 km。摩托车平均故障间隔里程: 现生产产品 6 000 km, 新开发设计产品 8 000 km。轿车质量保证期: 2 ~ 3 年或

4 万 ~ 6 万 km, 普通轿车及中高级轿车车身锈蚀(穿孔)保证期为 5 年。按轿车排量分别规定为: 微型轿车 (< 1.0 L) 达到 2 年或 4 万 km, 普通轿车 (1.0 ~ 1.6 L) 达到 3 年或 5 万 km, 中高级轿车 (> 1.6 L) 达到 3 年或 6 万 km。

(摘自《中国汽车报》, 1999-09-23)