

钢丝帘线泊松比的理论计算

刘连云

(青岛第二橡胶厂 266041)

摘要 对钢丝帘线的泊松比提出了一种理论计算方法,推导出了结构为 $1 \times 5 \times 0.25$ 的钢丝帘线的泊松比理论计算公式。发现钢丝在受到拉伸且各单丝受力均等的情况下,必将发生退捻现象,否则其结构将发生改变;钢丝帘线的泊松比并非常数。

关键词 钢丝帘线,泊松比

在现代轮胎设计理论中,经常要用到一些帘线/橡胶复合材料的工程弹性参数,钢丝帘线的泊松比(μ_c)就是其中较为重要的一个。对此参数,过去一直习惯采用哈尔平-蔡(Halpin-Tsai)方程进行计算:

$$\mu_{12} = \mu_c V_c + \mu_r (1 - V_c) \quad (1)$$

式中 μ_{12} ——复合材料的主泊松比;

μ_r ——橡胶的泊松比;

V_c ——钢丝帘线的体积分数。

但采用这种计算方法对帘线/橡胶复合材料的泊松比进行计算颇不准确。虽然后来也有人对此进行了大量的试验测定,但仍较难得到合理的帘线/橡胶复合材料中钢丝帘线的泊松比。本工作从理论上对钢丝帘线的泊松比进行了求解。

1 钢丝帘线泊松比的定义

整束钢丝帘线在受拉伸力时常伴有“退捻”现象,整束钢丝帘线发生横截面的旋转以及单丝与单丝之间相对位置的变化,而对每一条单丝而言,却并未发生实质性的伸长变细。鉴于钢丝帘线的这种变形特征,可把帘线泊松比计算时的横向应变替换为帘线的“横截面变化率”,用 ε_H 表示。若帘线未受拉伸时的横截面面积为 F_0 ,受拉伸后的横截面面积为 F_1 ,则横截面变化率可写成

$$\varepsilon_H = (F_1 - F_0) / F_0 \quad (2)$$

如果帘线的纵向伸长应变为 ε_Z ,则钢丝帘线的泊松比 μ_c 可表示为:

$$\mu_c = \varepsilon_H / \varepsilon_Z \quad (3)$$

2 钢丝帘线泊松比的计算

2.1 几点假设

(1)以结构为 $1 \times 5 \times 0.25$ 的钢丝帘线的一个捻距为研究单元,在拉伸过程中帘线结构不发生奇变。

(2)钢丝帘线外接圆直径作为帘线直径。

(3)钢丝帘线中各单丝均匀受力。

(4)单丝中心作为其长度的计算对象。

2.2 $1 \times 5 \times 0.25$ 钢丝帘线中的几何参数

一般认为, $1 \times 5 \times 0.25$ 钢丝帘线的横截面如图1所示,即5个直径为0.25 mm的圆两两相切。而实际上,由于钢丝帘线是由单丝相互缠绕而成,各单丝并不垂直于横截面,故钢丝帘线的断面结构应如图2所示,是5个相同的椭圆两两相切。

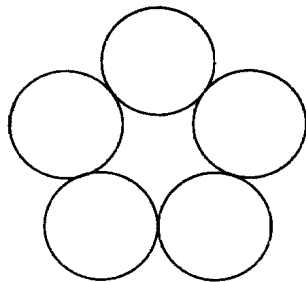


图1 钢丝帘线横截面图

(1) 钢丝帘线的外接圆直径

图1所示结构可以理解各单丝经受拉伸全部退捻,并能保持帘线结构不发生根本性变化的临界状态,一旦使该种排列发生变化,各单丝将不再均匀受力。

现求图2所示钢丝帘线外接圆的直径。

图3为图2钢丝横截面的局部解析图。

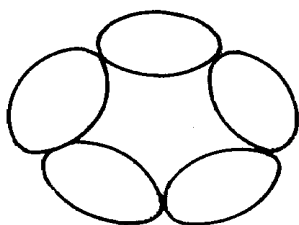


图2 钢丝帘线实际横截面图

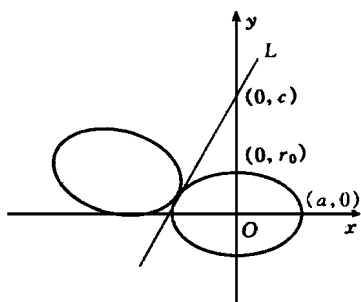


图3 钢丝横截面局部解析图

由图3可知:

直线 L 的方程为: $y = kx + c$

椭圆 O 的方程为: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{r_0^2} = 1$

由直线 L 与椭圆 O 相切可求得:

$$c = \sqrt{r_0^2 + a^2 k^2} \quad (4)$$

由式(4)可求得钢丝帘线的断面外接圆的直径 D :

$$D = 2(\sqrt{r_0^2 + a^2 k^2} + r_0) \quad (5)$$

(2) 捻距上的单丝长度 l

图4为钢丝帘线局部解析图。

求捻距上的单丝长度,也就是求 $z = bt$ 时, $t = 0 \sim \theta$ 的长度 l 。

由

$$l = \int_0^\theta \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

$$\begin{cases} dx = -a \sin t dt \\ dy = a \cos t dt \\ dz = b dt \end{cases}$$

和

$$l = \int_0^\theta \sqrt{a^2 + b^2} dt =$$

$$\theta \sqrt{\left(\frac{D - \Phi}{2}\right)^2 + \left(\frac{P}{\theta}\right)^2} \quad (6)$$

式中 θ ——单丝缠绕角度, $\theta = 2\pi$ 时, l 即为一个捻距上的单丝长度 l_0 ;

Φ ——单丝直径;

P ——缠绕角为 θ 时的缠绕高度, $\theta = 2\pi$

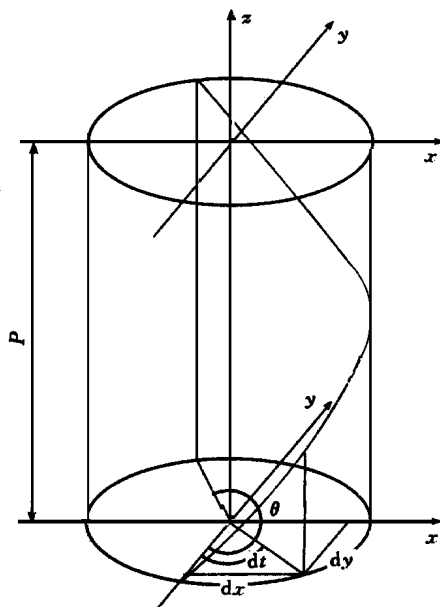


图4 钢丝局部解析图

时, $P = P_0$, P_0 为捻距。

(3) 椭圆长半轴 a

把式(5)代入式(6),得

$$l^2 = P^2 + \theta^2 r_0^2 + \theta^2 a^2 k^2 \quad (7)$$

图5为图4的展开图。

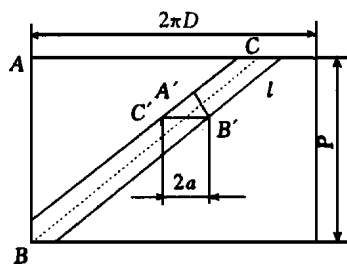


图5 图4展开图

图5中 ABC 相似于 $A'B'C'$, 因此

$$l = Pa / r_0 \quad (8)$$

由式(7)和(8)可得:

$$a^2 = \frac{P^2 r_0^2 + \theta^2 r_0^4}{P^2 - \theta^2 k^2 r_0^2} \quad (9)$$

故单位捻距上的 a_0 值为:

$$a_0^2 = \frac{P^2 r_0^2 + 4\pi^2 r_0^4}{P^2 - 4\pi^2 k^2 r_0^2} \quad (10)$$

2.3 1 × 5 × 0.25 钢丝帘线的泊松比

以一个单位捻距 P_0 、单丝直径为 Φ 的钢丝帘线作为初始考察对象, 受力拉伸后其缠绕高度为 P , 相应的缠绕角度为 θ , 则帘线横截面的变化率为:

$$\varepsilon_H = (F_1 - F_0) / F_0 = (D^2 - D_0^2) / D_0^2 \quad (11)$$

由式(6) ,(9)和(10)可得

$$D_0^2 = 4(2r_0^2 + 2r_0 \sqrt{r_0^2 + a_0^2 k^2} + a_0^2 k^2) \quad (12)$$

$$D^2 = 4(2r_0^2 + 2r_0 \sqrt{r_0^2 + \frac{\Phi^2 r_0^2}{P^2} k^2} + \frac{\Phi^2 r_0^2}{P^2} k^2) \quad (13)$$

由式(11) ,(12)和(13)可求出 ε_H 。

因为单位捻距 P_0 上的单丝在拉伸退捻[帘线拉伸量为 ΔP (即 $P - P_0$)]后其长度不发生变化,所以可由式(6)和(7)得出:

(1) 未拉伸时,单位捻距上的单丝长度 l_0 :

$$l_0^2 = P_0^2 + 4\pi^2 r_0^2 + 4\pi^2 k^2 \frac{P_0^2 r_0^2 + 4\pi^2 r_0^4}{P_0^2 - 4\pi^2 k^2 r_0^2} \quad (14)$$

(2) 拉伸退捻后的单丝长度 l :

$$\mu_c = \frac{2P_0 r_0 [\frac{r_0}{P} \sqrt{P^2 + (P_0^2 + 4\pi^2 r_0^2 + 4\pi^2 r_0^2 a_0^2) k^2} - \sqrt{r_0^2 + a_0^2 k^2}] + P_0 k^2 [\frac{r_0}{P^2} (P_0 + 4\pi^2 r_0^2 + 4\pi^2 k^2 a_0^2) - a_0^2]}{(P - P_0) (2r_0^2 + 2r_0 \sqrt{r_0^2 + a_0^2 k^2} + a_0^2 k^2)} \quad (17)$$

即结构为 1 ×5 ×0.25 钢丝绳线的泊松比是拉伸量 ΔP 的函数。

图 6 为计算机计算并绘制的 1 ×5 ×0.25 钢丝绳线泊松比与拉伸量、退捻角的关系图。

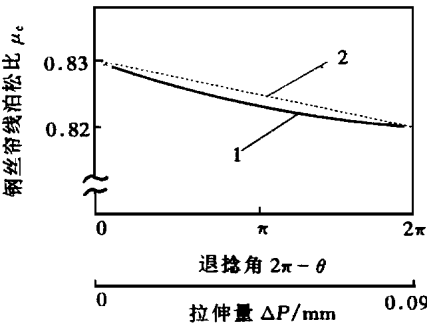


图 6 钢丝绳线泊松比与拉伸量、退捻角的关系图

1—泊松比-退捻角关系;2—泊松比-拉伸量关系;

$r_0 = 0.25/2 \text{ mm}$, $P_0 = 10 \text{ mm}$, $k = \tan 54^\circ$

$$l^2 = P^2 + \theta^2 r_0^2 + \theta^2 k^2 \frac{P^2 r_0^2 + \theta^2 r_0^4}{P^2 - \theta^2 k^2 r_0^2} \quad (15)$$

式(15)可简化为:

$$\theta^2 = \frac{P^2 (l^2 - P^2)}{r_0^2 (P^2 + l^2 k^2)} \quad (16)$$

在拉伸中,若不发生退捻,同时结构不被破坏,则 $\theta = 2\pi$ 。经验算发现,当 $P = P_0$,即 $\varepsilon_z = (P - P_0)/P_0$ 时无意义。

由此可知在拉伸过程中必将发生退捻现象,否则将发生结构改变。下面假设帘线结构不被破坏,分析在仅发生退捻的情况下,其泊松比的变化。

由式(3) ,(10) ,(11) ,(12)和(16)可知,钢丝绳线的泊松比为:

3 结论

(1) 在钢丝绳线受到拉伸力的作用,并且帘线中各单丝的受力均相等的情况下,钢丝绳线必将会发生退捻现象,否则钢丝结构将会发生改变。

(2) 钢丝绳线的泊松比并不是一个常数。

致谢 本工作得到华南理工大学高分子系罗贤光、俞淇两位教授的批评指正,特此表示感谢。

参考文献

1 顾学甫,涂玉谦,俞 淇.用截面固结法测定钢丝绳线泊松比.橡胶工业,1997,44(3),173~175。

第十届全国轮胎技术研讨会论文

Theoretic Calculation of Steel Cord Poisson's Ratio

Liu Lianyun

(Qingdao No.2 Rubber Factory 266041)

Abstract A theoretic calculating method for the Poisson's ratio of steel cord has been provided and hence a calculating formula for the Poisson's ratio of 1 ×5 ×0.25 steel cord has been derived. It is found that the steel cord must be untwisted while it is stretched and an even force is applied to the individual filaments,otherwise the cord structure would be changed;the Poisson's ratio of steel cord isn't a constant.

Keywords steel cord ,Poisson's ratio