

子午线轮胎有限元分析

第 2 讲 有限单元法简介

洪宗跃, 吴桂忠

(北京橡胶工业研究设计院, 北京 100039)

中图分类号: U463.341⁺.6; O241.82 文献标识码: E 文章编号: 1006-8171(2005)11-0697-04

有限单元法(亦称有限元分析)是近几十年来在工程技术各个领域广泛应用的科学。1943年有些学者提出了基于最小位能原理的有限元基本思想,其实质是将连续体离散化,也就是将连续的求解域离散为一组有限个单元的组合体。单元间只在节点处相连,并用等效节点力代替作用于单元上的外力,然后借用结构矩阵分析的方法来处理。1960年以后,随着电子计算机的普及和发展,有限元法的优越性更加明显,按原来的计算方法不能解决的问题,现在用有限元法可获得较为满意的结果,有限元法的应用范围已从弹力到动力,从弹性塑料到塑性、粘弹性和复合材料。正是由于有限元法自身的优越性,其应用范围不断扩大,在应用过程中,其自身也得到进一步完善。

有限元法是一种基于能量原理的数值方法,是里兹(Ritz)法的另一种形式,它适用于里兹法中用到的所有弹性理论,是处理连续介质问题的一种普遍方法。运用有限元法可以处理几何形态复杂的非线性弹性问题。如果使用不当,容易使解的精度降低或不收敛。有限元法的主要缺点是计算过程繁琐,特别是前处理费时费力,对于大型问题比较费机时。计算误差主要来源于单元划分和边界条件。作为一种数值方法,计算误差是不可避免的,虽然在数学上已充分考虑了误差的影响,但是累计误差还是不容忽视的。边界条件须根据具体问题确定。

1 有限元法的基本原理

有限元法计算程序很复杂,一般的使用者不

需要自己编制程序。目前国内外已经形成许多通用的商品程序,各个程序的侧重点不同,但基本原理一致。使用者可以根据需要选择适当的程序。用虚功原理进行有限元分析可分为以下几个步骤。

1.1 单元分析

单元分析的目的是确定单元刚度矩阵,建立作用力(内力和外力)与位移的关系:

$$\mathbf{F}^e = [\mathbf{K}]^e \cdot \mathbf{a}^e \quad (1)$$

式中 $\mathbf{F}^e$ ——单元节点作用力;

$[\mathbf{K}]^e$ ——单元刚度矩阵;

$\mathbf{a}^e$ ——单元节点位移。

从式(1)可以看出,单元刚度反映了单元节点力和单元节点位移的转换关系。

1.2 整体分析

整体分析的目的是形成结构的整体刚度矩阵($[\mathbf{K}]$),系统的平衡方程可以表示为:

$$\mathbf{P} = [\mathbf{K}] \cdot \mathbf{a} \quad (2)$$

式中 $\mathbf{P}$ ——整体节点力;

$\mathbf{a}$ ——整体节点位移。

外载即 $\mathbf{P}$ 是已知的,整体刚度矩阵反映出总体外载和节点位移的转换关系。

1.3 求解代数方程组

对于静力线性问题,式(2)得到的是一组线性代数方程组,此式未经修正, $[\mathbf{K}]$ 是奇异的。引入位移边界条件, $[\mathbf{K}]$ 的奇异性消失。然后求解节点位移并计算各单元内力。线性代数方程组的解法有很多种,但基本上可以分为两大类:直接解法和迭代解法。

1.4 求解单元内力

计算在各单元内进行,单元内力(σ)由下式计算:

$$\sigma = [D][B]a^e \quad (3)$$

式中 $[D]$ ——弹性矩阵;

$[B]$ ——应变矩阵。

2 轴对称有限元的理论背景

2.1 单元划分

如果只研究轮胎在充气负荷下的力学响应,作用负荷及约束条件都对称于转轴(z),将 z 轴称为对称轴,在载荷作用下产生的位移、应变和应力也对称于此轴。

轮胎是旋转壳几何体,如图1所示。为使问题简化,建立圆柱坐标系,则对称轴为 z 轴, r 轴表示径向, θ 轴表示周向。

应力、应变和位移都与 θ 方向无关,只是 r 和 z 的函数。任一点的位移只有两个方向的分量,即沿 r 方向的径向位移和沿 z 方向的轴向位移。由于轴对称, θ 方向的位移等于0,因此轴对称问题是二维问题。

充分利用轮胎的几何特点可以简化问题,建立较为简单的数学模型,避免由于轮胎结构复杂而引起的繁琐的力学和数学分析。

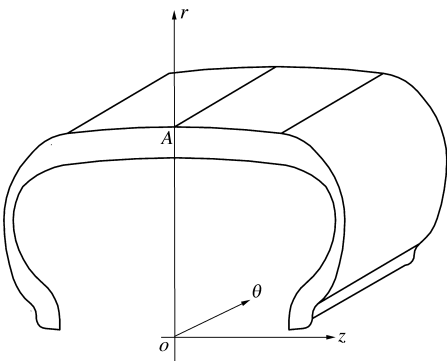


图1 圆柱坐标系中的轮胎旋转壳几何体

2.2 应力-应变关系

(1) 应力-应变公式

根据弹性力学,笛卡儿坐标系(x, y, z)中的应变分量可以表示为

$$\{\epsilon\} = [\epsilon_x \ \epsilon_y \ \epsilon_z \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx} \ \gamma_{xy}]^T$$

单元内任意一点的应变和该点位移的关系为:

$$\{\epsilon\} = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = [L]\{U\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \\ \frac{u}{r} \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中, $[L]$ 是微分算子, $\{U\}$ 为该点位移向量。

单元内任意点的位移又可以用单元节点位移来表示: $\{U\} = [N]\{\delta\}$ 。式中, $[N]$ 为引入的形函数矩阵,是与该点坐标和节点坐标有关的多项式, $\{\delta\}$ 为节点位移向量。这样,单元内任一点的应变与节点位移的关系为:

$$\{\epsilon\} = [L][N]\{\delta\} = [B]\{\delta\} \quad (5)$$

在笛卡儿坐标系(x, y, z)中的应力分量同样可以表示为:

$$\{\sigma\} = [\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{yz} \ \tau_{zx} \ \tau_{xy}]^T$$

对于各向异性材料的一般情况,应力与应变的关系根据虎克定律确定:

$$\{\sigma\} = [D]\{\epsilon\} \quad (6a)$$

写成分量形式为:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{yz} \ \tau_{zx} \ \tau_{xy} \end{bmatrix}^T = [D] \begin{bmatrix} \epsilon_x \ \epsilon_y \ \epsilon_z \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx} \ \gamma_{xy} \end{bmatrix}^T \quad (6b)$$

反过来,有

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \ \epsilon_y \ \epsilon_z \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx} \ \gamma_{xy} \end{bmatrix}^T = [S] \begin{bmatrix} \sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{yz} \ \tau_{zx} \ \tau_{xy} \end{bmatrix}^T \quad (6c)$$

式中, $[S]$ 为柔度矩阵,与材料的特性有关,且 $[D] = [S]^{-1}$ 。 $[D]$ 和 $[S]$ 都是对称矩阵,即 $D_{ij} = D_{ji}$, $S_{ij} = S_{ji}$,其中独立的弹性系数有21个。

正交各向异性材料是一种特殊的各向异性材料,柔度矩阵可以用工程常数表示为:

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\mu_{21}}{E_2} & -\frac{\mu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\mu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu_{13}}{E_1} & -\frac{\mu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{32}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (7)$$

式中, 1, 2 和 3 为局部坐标系方向。

横观各向同性材料是一种特殊的正交各向异

$$[S]_{1,2,3} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\mu_{12}}{E_1} & -\frac{\mu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_1} & -\frac{\mu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu_{13}}{E_1} & -\frac{\mu_{13}}{E_1} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (8)$$

(2) 弹性系数的转轴公式

若定义材料主轴坐标系(局部坐标系 1, 2, 3)

$$[Q] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & 0 & \sin^2 \theta & 0 & -\sin \theta \cos \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin^2 \theta & 0 & \cos^2 \theta & 0 & \sin \theta \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 2 \sin \theta \cos \theta & 0 & -2 \sin \theta \cos \theta & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (9)$$

柔度矩阵的转轴公式为:

$$[S]_{x,y,z} = [Q][S]_{1,2,3}[Q]^T \quad (10)$$

由于弹性矩阵和柔度矩阵互为逆矩阵, 则有:

$$[D]_{x,y,z} = [S]_{x,y,z}^{-1} \quad (11)$$

2.3 单元刚度矩阵与整体刚度矩阵

对于轴对称情况, 由应变能法求得单元刚度矩阵:

$$[K]^e = 2\pi \int_0^R [B]^T [D] [B] r dr dz \quad (12)$$

将所有单元的刚度矩阵组合起来, 得到整个结构的刚度矩阵。整体刚度矩阵的行、列元素是对应单元的刚度矩阵的元素值, 其表达式为:

$$[K] = \sum_{L=1}^N [K]_L \quad (13)$$

式中, N 为有限元网格划分的单元总数, $[K]_L$ 是第 L 个单元的刚度矩阵。

2.4 整体分析

单元刚度矩阵形成整体刚度矩阵是有限元法中关键的一步, 由程序完成。有了整体刚度矩阵后, 即可以得到结构的平衡方程, 利用最小位能原理可以建立如下的平衡公式:

性材料, 当 1-2 平面为各向同性面时, 柔度矩阵可以用工程常数表示为:

与笛卡儿坐标系(x, y, z)的夹角为 θ , 则转角矩阵($[Q]$)为:

$$[K]\{\delta\} = \{P\} \quad (14a)$$

或可改写成:

$$\{\delta\} = [K]^{-1}\{P\} \quad (14b)$$

式中, $\{P\}$ 为结构节点的载荷列阵。根据式(14a)和(14b)可以求出各节点的位移, 进而求出每个单元的应变和应力。

3 有限元法的操作步骤

3.1 前处理

有限元法的前处理包括绘制几何图形、划分单元网格、读取点坐标值、准备材料性质参数、确定边界条件及选择计算步长等。

对于轮胎结构的有限元分析, 绘制轮胎材料分布图是必备的, 可以按照材料分布图划分单元。对于二维分析, 在轮胎材料分布图上划分单元就可以满足要求。若进行三维分析, 则要在二维分析的基础上增加周向坐标。材料性质包括橡胶、帘线的弹性模量、泊松比以及按复合材料计算的弹性常数。边界条件是确定模型节点的位移条件, 对轮胎来说, 与轮辋的接触点位移为零, 胎冠

处只有径向位移。

3.2 有限元处理过程

根据具体问题选择有限元程序,处理过程由计算机完成。轮胎的结构以及所使用的材料都很复杂,要同时考虑这些复杂的因素,必须根据大量

的试验,建立适合轮胎特点模型。

3.3 后处理

计算结果分析是后处理的主要内容。目前大多数的商业软件都能计算出节点的位移,经转换可得到应力和应变分布等。

风神轮胎公司庆祝建厂 40 周年

中图分类号:TQ336.1 文献标识码:D

2005年9月23日,风神轮胎股份有限公司(以下简称风神公司)在焦作市人民会堂隆重集会,庆祝建厂40周年,焦作市市长毛超峰到会致词。

40年来,风神公司勇于改革,大胆创新,通过实施项目带动战略,使公司取得了骄人的业绩。2001~2004年,公司累计上缴利税8.24亿元,是国家建厂总投资4551万元的18倍,相当于一年的赚回4.5个同等规模的轮胎厂。2004年人均产值超过100万元,利税9.7万元,利润3.3万元,各项经济指标均创公司历史最高。2005年1~8月,公司完成工业产值35亿元,实现销售收入24亿元,为全年完成既定目标奠定了基础。

风神公司将继续以优化产品结构和产业升级为主线,以高新技术为支撑,以技术改造为动力,不断提高产品的市场占有率和竞争力,力争到2007年实现销售收入75亿元,2010年达到100亿元。

(风神轮胎股份有限公司 谢智保供稿)

徐工轮胎实施工程机械轮胎及 农业轮胎扩建工程

中图分类号:TQ336.1 文献标识码:D

徐州徐工轮胎有限公司于2005年7月再次增加成套先进设备,实施工程机械轮胎及农业轮胎生产的扩建工程,目前工程已竣工并投产,预计年新增产值3亿元。

该扩建工程投资1000多万元,主要包括新增2条胎面缠绕线、2台4[#]成型机、8个 Φ 3200mm硫化罐、2台定型机、2台贴合机、1台裁断机、2台10t的行车等配套设备。2005年9月,硫化罐、定型机等设备全部安装到位并调试成功,顺利通过了技术、安全等部门的验收,被评为优良工程。

新增的胎面缠绕线由监控软件与可编程控制器系统一起控制,操作者通过生产计划选择、工艺参数浏览、工艺参数编辑、历史数据查询、报表管理等,实行一台缠绕机缠两个机头工作,大大提高了生产效率,而且缠绕胎面尺寸准确、稳定性高;4[#]成型机的成型棒可上下调节,机头宽度和直径特别适用于胎体厚、生产难度大的工程机械轮胎及外直径大的农业轮胎; Φ 3200mm硫化罐的罐盖设计独特,可多加一副模具,提高了硫化效率;定型机的风压大,效率高;贴合机不仅能满足布筒宽度的要求,而且压实性好,布筒不易打折,工人劳动强度低;10t行车不仅操作方便快捷,满足了大规格工程机械轮胎及农业轮胎模具质量的要求,而且安全性高,故障率低。

随着大规格工程机械轮胎和农业轮胎需求量增大,新增设备的作用正不断凸现出来,徐州徐工轮胎有限公司将继续走向良性可持续发展的道路。

(徐州徐工轮胎有限公司 吕军供稿)

兴达轮胎公司年产 10 万条工程机械 子午线轮胎项目开工

中图分类号:U463.341+.6 文献标识码:D

山东兴源集团兴达轮胎有限公司年产10万条工程机械子午线轮胎项目于2005年9月26日奠基,土建工程正式拉开帷幕。

该项目是在兴源集团成功运营120万条全钢载重子午线轮胎项目的基础上投资开发的,总占地面积为18.67万m²,由兴源集团和鲁能方大集团共同投资3亿元。项目分一、二期工程建设,一期工程投资1.5亿元,年产工程机械子午线轮胎4万条,计划2006年5月投产,可实现年产值6亿余元。目前,厂房建设和设备订购工作正在同步有序地进行。

(兴源轮胎集团有限公司 吴长清供稿)