结构设计

轮胎的有限元模型化

L. O. Faria et al. 著　丁剑平译　俞　淇校

摘要　近年来，在通用性三维有限元方法模拟轮胎结构的大变形稳态性能方面取得了一定的进展。本文所提出的新进展要点有：包括粘弹性材料在内的材料伸张模拟性能的发展，含有特殊非线性约束的流动接触问题公式的概括。这些约束包括法向荷载、外力矩以及恒定的压力-容积。提出了轮胎分析中的一些新的测试问题和实例。

轮胎实际模型的特性应说明非弹性材料的性能及由滚动阻力初态时所知的滚动摩擦。过去几年里，许多学者都从事过轮胎有限元模型方面的研究，见文献[2,9,13,17,1,6]。本文将类似轮胎结构的静态和动态有限元公式推广到粘弹性材料模型，此公式适合大位移、大转动及大应变情况，并且在计算中可有效使用。耗散效应是以文献[12]中介绍的热力学条件为基础的，且采用了由线性状态方程控制变化的内部状况可变张量。轮胎稳态滚动变化方程的积分可由傅里叶分析法解决。

在有限元模型中，利用修正了的库仑摩擦定律来处理滚动摩擦问题。此公式引入了规定的旋转速度或转矩，为分析自由滚动、转弯加速等作好准备。除了所指定的转矩外，为了方便起见，在轮胎分析过程中有时用法向负荷来代替轮毂的偏斜。由于连接负荷与应变的方程对在不同的有限元中的自由度进行偶合，从而增加了求解系统的带宽。这种方法有限元分析中很少用到，我们提出了一种算法可在保持牛顿法二次收敛的同时又避免出现上述问题。

为了说明轮胎充气变形后所引起的内压变化，我们采用了理想气体条件：压力×体积＝常数。此条件的实现与其它完整约束(法向负荷、转矩)稍有类似。尽管它对典型的轮胎变形影响不大，但对包括热效应在内的未来发展趋势却可能有着重要意义。

近来，在解释下列性能方面提出了许多新的数值实例：材料内部损耗所引起的滚动阻力计算，材料性能和自由滚动中旋转速度所引起的大变形的影响，在压力-容积约束下由于变形所引起的内压变化以及轮胎结构模拟。另外，已解决了一些数值实例包括为"全国性轮胎模型大纲"的轿车轮胎提供了首批结果。本文所列出的即是针对此轮胎的静态接触和摩擦接触状况下所获得的首批结果。

1　稳态滚动接触问题的边界条件及方程摘要

在文献[2,3]中已提出了稳态滚动接触问题的边界值公式，这里列出了其主要结果并将其推广到粘弹性材料和滚动摩擦情形。

我们要模拟的问题类型如图1所示：一个类似轮胎结构在平面上沿曲线路径滚动，各种力、位移和速度作用在由各向异性体，也许是非弹性体所构成的胎体上。这时，胎体的速度和应力一般来说与时间有关，但若满足某些条件，就有可能得到稳态解，即问题中不再显含时间。

稳态的定义认为，属于一种特殊状态，对一轴对称物体，如图1所示，当它以速度 C 运动并以角速度 ω 转动时，就可构成稳态。我们把任一时刻 τ 刚性旋转体所占有空间(已知)的位置作为基准轮廓，并用 β 表示，在 β 中的具体位置可由 Y 表达，Y 被选作空间的独立变量，相应质点 P 可由下式得：

$$P=RY$$

式中　R——文献[2,3]中定义为旋转张量。

为了描述结构的变形，我们定义一个变换 $X(Y,t)$ 作为 Y 处 τ 时刻的一个位置函数来表达 τ 时刻 P 的位置，若 X 与时间无关，转动角速度 ω、拐弯角速度 W、行驶速度 C 均为常数，那么可得文献[3]所提及的稳态情形。

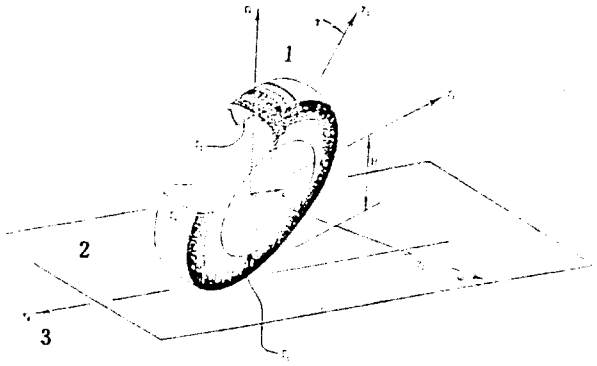


图 1 三维滚动接触问题

1—外倾(Camber);2—地平面;3—地面速度

质点 P 处的变形率 F 可由下式求得：

$$F(P,t)=F_Y(Y)R(t),Y=RP \tag{1}$$

$$F_Y(Y)=\frac{\partial X}{\partial Y}(Y) \tag{2}$$

与 F 有关的拉格朗日应变张量定义为

$$E=\frac{1}{2}(F^TF-I) \tag{3}$$

相关的 X 满足场方程：

$$divS=\rho\ddot{X} \tag{4}$$

ρ 是密度，S 是 Y 处与 P 点的第一 Piola 应力 $\sum$ 有关的应力，即：$S(Y)=\sum(P,t)R(t)^T$。且 $\sum(P,t)$ 与第二 *Piola-Kirchhoff* 应力张量 $\Phi(P,t)$ 有关，即：

$$\sum(P,t)=F(P,t)\psi(P,t)$$

文献[2,3]中已详细讨论过弹性材料的本构方程。

为说明变形过程中的耗散效应，我们考虑一个简单的有限应变弹性模型。这种模型在文献[2]和[4]中已介绍过，是以含内部变量的热力学为基础的，假定材料不可压缩，那么对称 *Piola* 应力张量的本构方程为：

$$\psi=DEV(\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial E}-Q)-PC^{-1} \tag{5}$$

C 是 Caucky-Green 应变张量，ω 是应变能函数，Q 是内部变量张量，其变化率由下列线性方程调节：

$$\dot{Q}+\frac{1}{\mu}Q=\frac{\gamma}{\mu}DEV(\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial E}) \tag{6}$$

μ 为松弛时间，$DEV[\cdot]=(\cdot)-\frac{1}{3}[C:(\cdot)]C^{-1}$ 确定其基准轮廓的偏差，参数 γ 在 0 至 1 之间变化。从 $0<\gamma<1$ 可得标准的固体型响应曲线，而弹性固体和 Maxwell 流体则分别与 $\gamma=0$ 和 $\gamma=1$ 对应。

就轮胎的稳态旋转而言，每一次旋转，胎体各部分都有一个应变周期，从粘弹性体的本构关系看，可知那些点上的应力也有同样的周期，由此可知文献[3]中所述的 Cawchy 应力是稳定的。由于材料中应力函数的周期性，比率方程可通过对弹性应力 $\psi_e=\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial E}$ 进行傅里叶分解而得到有效解决，即通过：

$$\psi=\psi_0+\sum_n\psi_{2n}\cos n\omega t+\sum_n\psi_{2n}\sin n\omega t \tag{7}$$

得到典型的谐波方程：

$$\dot{Q}+\frac{1}{\mu}Q=\frac{\gamma}{\mu}\sin n\omega t$$

$$Q=-\frac{\gamma}{n^2\omega^2\mu^2+1}\psi_{2n}n\omega\mu\cos n\omega t+\frac{\gamma\psi_{2n}}{n^2\omega^2\mu^2+1}\sin n\omega t \tag{8}$$

上式给出了质点 P 处随时间变化的应力，而我们感兴趣的是特定时间里所有点的应力，因而我们采用了动力学分解：

$$x(p,t)=x(y),y=R(t)P$$

变形率 F 由式(1)确定。

根据周向应力分布情形，我们采用上述分解来计算任意质点的应力-应变关系曲线(指轮胎稳态旋转情形)。采用式

$$Q=\omega t$$

有

$$E(P,t)=\frac{1}{2}[R^T(t)F_y^T(y)\cdot F_y(y)R(t)-1] \tag{9}$$

y 是由 $y=R(t)P$ 所确定，类似关系也适用于弹性应力 ψ_e。

上述关系是旋转体中实现稳态粘弹性的基础。应说明在数值运算过程中，我们将上述粘弹性模型作为虎克(Hookean)或门尼-里夫林(Mooney-Rivlin)这些具有典型特性材料的推广。如文献[4]和[12]中介绍，还可以推广到更一般情形的模型：可压缩、各向异性以及多次松弛时间。

为了详细说明边界条件，我们认为 β 的边界是由 3 个不相连的部分构成，如图 1 所

示：

$$\partial\beta=\overline{r_1ur_2ur_c}$$

r_1 中的相关位移可通过轮辋区位移矢量函数 g 来描述，r_2 中规定了压力 Π 的分布，剩下的边界 r_c 可与由方程：

$$b\cdot y=H$$

所确定的平面接触，此平面单元法向 b 与转弯速度 W 方向平行，假定滚动体与相对于车轮以 $V_0=C$ 速度运动的地面之间的摩擦是 v 为常系数的库仑型摩擦，有关边界条件的详细公式在文献[2,3]中提到过。

轮胎分析中，为了方便起见，有时规定法向力 F 来代替接触面状态，如图 2 所示，从 F 与接地面位移 u 及接触条件之间的联系得下列式子：

$$\begin{aligned} &b\cdot S_n=0 \quad 若\ x\cdot b+u\leqslant H\\ &b\cdot S_n\leqslant 0 \quad 若\ x\cdot b+u=H \end{aligned} \tag{10}$$

$$F=-\int_{r_c} b\cdot S_n\mathrm{d}A$$

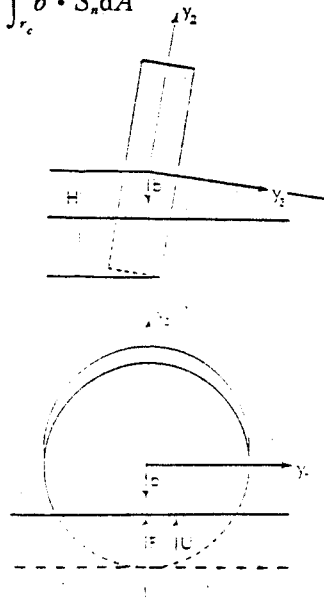


图 2　受到转矩 T 和法向负荷 F 引起的相关位移 U 的胎体，其变形和未变形的几何形状

一旦确定了 C、Ω 和 ω 后，阻力矩及摩擦力将增加以维持稳态运动。为了弄清楚自由滚动、加速、刹车过程，用转矩 T 代替旋转速度是很必要的。如图 2 所示，假设 T 很小，不会使物体加速运动，或者说是处于稳定状态，要得到旋转角速度 ω，必须补充公式：

$$e_3\cdot\int_{r_c}(x-O)\times S_n\mathrm{d}A+T=0 \tag{11}$$

一般说来，轮胎充气产生压力 Π，然后产生变形。为了说明变形对压力变化的影响，我们采用了简单理想气体状态方程：

$$\frac{\Pi^*}{3}\int_{r_2}x\cdot n\mathrm{d}A=\text{Constant} \tag{12}$$

Π^* 是恒温状态下的通用压力。

变分公式

为导出变分公式，我们先介绍一类平坦检验函数 μ 和一标准程序[3]，以便获得滚动接触问题的变分公式：

$$\begin{aligned} &\int_\beta S:\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}V+\int_{r_2}\Pi(\det F_y)F_y^{-T}n\mu\mathrm{d}A+\\ &\frac{1}{\varepsilon_1}\int_{r_c}(x\cdot b-H)^+\mu_n\mathrm{d}A+\int_{r_2}\tau_t\cdot\mu\mathrm{d}A\\ &=\int_\beta\rho x\cdot\left[\frac{\partial\mu}{\partial y}\right]\frac{\partial y}{\partial t}\mathrm{d}V \end{aligned} \tag{13}$$

此公式适用于 β 中所有平坦域上的 μ，且有

$$\mu=0 \qquad 在\ r_1\ 上$$

如文献[2]和[3]所述，方程(13)第三、四两项分别代表不利接触及均匀摩擦条件，剩余部分分别对应于应变能(第一项)、压力荷载的实际工况(第二项)和惯性部分(最后项)。

对于不可压缩情形，约束

$$\det C=1$$

可以通过在方程(13)中增加下列补偿部分而得到放松：

$$\frac{1}{\varepsilon_3}\int(\det C-1)adj\ C\ \mathrm{d}v \tag{14}$$

$adj\ C$ 是 C 的伴随矩阵，ε_3 是相应的补偿系数。

若给定的垂直荷载 F 满足式(10)，那么式(13)中第三项可由下式

$$\frac{1}{\varepsilon_1}\int_{r_c}(x\cdot b-H+U)^+(\mu_n+V)\mathrm{d}A-FV \tag{15}$$

代替，并且对所有虚拟变形 μ 及数值 V 有效。

若用转矩 Te_3 代替旋转速度 We_3，那么须将(11)式加到公式中去，当理想气体处于约束状态，那么公式(12)也须附加进去。

数值解法

为了解决修正变分问题，我们采用了载荷增量法及有限元的空间离散化方法，注意到数值解决的一个显著特征是对本构方程(6)的内部变量 Q 的求解可通过傅里叶分析求解。由于运动是稳定的，因此不必给出比率方程(6)的初始条件，而只需给出截面上质点的应变关系曲线。事实上，对在以轴线为中心的同一圆周上的两质点 P 和 q，其变形度关系为：

$$F(q,t)=F(p,t+\tau)R^T(\tau)$$

$$q=R(\tau)P$$

当法向力、转矩或者是压力-容积约束存在时，须在原公式中增加(10)～(12)式，这些方程包含了属于不同有限单元的未知量，增加了所求方程组的带宽，代之以同样约束数目的附加右边项，通过下列技巧可求解，此处仅就给定法向力实例进行说明。假设 K 及 R 分别表示牛顿法所公认的变通矩阵及右边项，$\delta\mu$ 表示位移增量，δu 表示平面位移增量，所求的方程组为：

$$\begin{aligned} K\delta\mu+b\delta u&=R\\ b^T\delta\mu+c\delta u&=r \end{aligned} \tag{16}$$

后一方程表示所给定的法向力条件，此条件涉及接地区所有自由度，从而改变方程的带结构，方程组(16)可通过下列方程重新组合而得到有效解决，

$$K\delta\mu=R-b\delta u$$

然后分两步求解

(1)带有两个右边项的原有方程组求解：

$$Kx=R$$

$$Ky=-b$$

(2)$\delta\mu$ 和 δu 的重新计算

$$\delta\mu=x+\delta u\cdot y$$

$$\delta u=\frac{r-b\cdot x}{b\cdot y+c}$$

本段符号 b、x、y 与前节所介绍的不同。

有限元模型

目前应用和发展的有三类等参元，一类是三维 20 节点等参元，一类是 8 节点多层薄壳等参元，还有一类是 16 节点多层厚壳等参元。

文献[2]和[3]中已介绍过 20 节点空间单元和 8 节点壳单元。两种壳体单元在数学上是等效的，然而却包含着不同的自由度。8 节点壳单元包含基准面上的位移和转动自由度，16 节点厚壳单元则包括壳体顶端和底部的位移自由度，这种单元更适用于目前轮胎结构的厚层。上述单元所形成的有限元分析在轮胎模型中可得到十分精确的结果。

数值结果

本节提出了一些数值实例，这些例子中包括了与本文提出的新公式有关的简单测试问题以及更加复杂的实际轮胎模型有限元分析。

滚动摩擦

对于摩擦系数趋于无穷和趋于零时，滚动摩擦问题[15]可通过弹性接触的赫茨理论推广而解决。这些方法是基于以下事实即接地区与滚动体半径相比较小，且几何形状的半空间近似值是可靠的。总之，线弹性结果表明：在给定地面速度和自由滚动的条件下，与材料性能参数泊松比有关的旋转速度和由不可压缩材料构成的刚性滚动体的解答相同，且随泊松比的减小而增加。

通过数值实验，我们研究了近似平面应变状态下，外径不变、内径可变的滚动体，验证了一定的几何形状和大变形的影响。所使用的材料一种是门尼-里夫林(Mooney - Rivlin)不可压缩材料，一种是可压缩的虎克(Hookean)材料。滚动胎体的变形和有限元网格如图 3 所示。表 1,2 给出了三种不同内径和两种不同材料的结果。

表 1 自由滚动体的旋转速度

材料	内半径		
	0.2	1	1.7
不可压缩门尼-里夫林 $a_1=80, a_2=20$	0.99349	0.97977	0.87183
虎克各向同性 $E=800, V=0.3$	1.0218	1.02415	1.00297

注：外半径 2，地面速度 2，摩擦系数 0.02，近似速度 1.95。

表 2　自由滚动柱体的旋转速度

材　料	内半径		
	0.2	1.0	1.7
不可压缩门尼-里夫林 $a_1=80, a_2=20$	0.98558	0.95009	0.730569
虎克各向同性 $E=800, V=0.3$	1.02970	1.0281	0.991562

注：外半径 2，地面速度 2，摩擦系数 0.02，近似速度 1.9。

我们注意到对小变形、小内径情形，物体处于线弹性恢复状态。而在其它情况下结论是不同的。由于大变形的影响，用赫茨法预测接地区压缩状态时其变化趋势甚至会完全相反。

对于相同的几何形状和近似速度，除了保持泊松比为常数外，对不同的材料特性进行数值测试，可得到非常相近的旋转速度。所以，在滚动摩擦中材料的可压缩性是非常关键的因素，这与线弹性结果是一致的。在分析

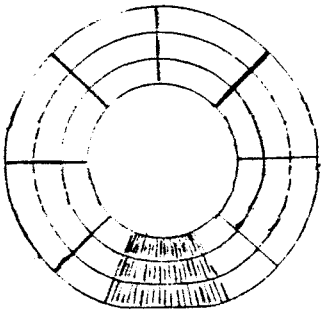


图 3　内半径 1.0，外半径 2.0 的滚动柱体

摩擦对旋转速度的影响时采用了类似方法，相应的结果见表 3。不出所料，摩擦影响下的旋转速度与刚体所得的解非常相近。

表 3　摩擦影响下自由滚动体的旋转速度

近似速度	摩擦系数	
	0.02	0.2
1.95	0.97977	0.98066
1.9	0.95009	0.95195

注：外半径 2，内半径 1，地面速度 2，Mooney-Rivlin $a_1=80, a_2=20$。

内径为 1 由可压缩材料构成的圆柱体的剪切力分布如图 4 所示，记录了被两个条形区分成 3 个滑移区的典型类型，质点以比地面速度大的速度进入接地区，并逐步下降直到与地面接触，然后继续下降至比地面速度更低，最后在离开接触区又重新加速。

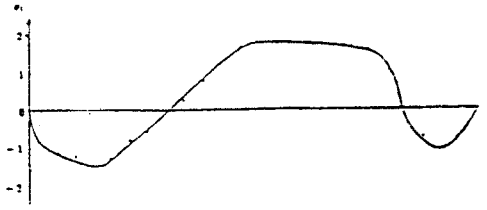


图 4　平面应变状态下柱体滚动接触切向力分布

内半径 1.0，外半径 2.0，泊松比 0.3

对不可压缩材料（内径为 1.7），其剪切力分布如图 5 所示。与图 4 正好相反，质点首先以比地面速度慢的速度进入接地区，然后经过一个与可压缩材料情况类似的粘-滑周期，但剪切力的符号相反。

这些剪切力分布看来是合理的，而且得到了实验证实。可是，有时我们却发现振荡应力状态，特别是在线弹性力学解法所预测的结果与数值有限弹性力学结果出现矛盾的时候。

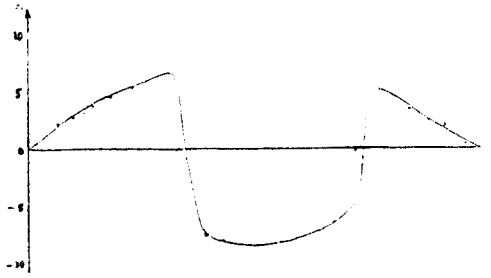


图 5　平面应变状态下柱体滚动接触切向力分布

内半径 1.7，外半径 2.0，泊松比 0.3

粘弹性体的滚动接触

在低速情况下，滚动接触对弹性圆柱体的滚动速度影响不大，仍保留了静态接触的

典型特征，换句话说，即接触区、关于中心线对称的压力分布及惯性力只对其数值有轻微的影响。

对粘弹性材料，由于其响应取决于变形率，故其解法取决于滚动速度。在速度很大或很小的情况下，其响应与弹性响应类似，只是当通过接触区的时间大致在材料的松弛时间范围内其解答才与弹性解答有很大区别。

由于粘弹材料的变形是不可逆的，因此其接触区的几何形状和法向压力分布是非对称的。从图 6 可清楚看到由粘弹性材料所构成的滚动圆柱体的法向接地压力分布，这种分布削弱了 Neo-Hookean 特性。柱体明显扭曲且接地区前移，还可注意到是非对称性的，靠近接地区有很大的压力。

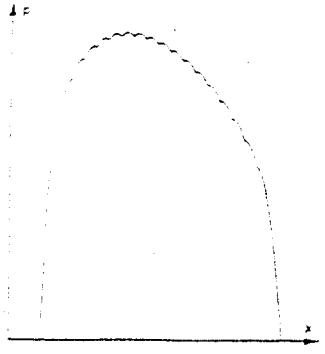


图 6 粘弹旋转体接触区压力分布

接地面和压力二者的非对称性引起了维持稳态运动的滚动阻力矩。数值实验从线性粘弹性力学方面证实了最大阻力矩出现在质点通过半个接触区的时间等于松弛时间 V 的时刻。如表 4 所示。

对粘弹性材料的滚动条件，所有滚动阻力均由水平力克服。如果规定了近似速度，那么接地区会向后移且法向力减小。

压力-容积约束

习惯上认为轮胎充气后应用等式：压力×容积＝常数。这种约束等价于充气后密封好的实际轮胎的特性。若轮胎与平面接触产生变形，理想气体方程将校正压力以保持乘积是常数。

对标准的轮胎结构进行数值分析时，压力的校正并不十分重要，即使是在急剧变形的情况下，压力也只低 10% 左右。如图 7 所示，由 Hookean 材料构成的半环面，其充气压力是 10psi(磅/英寸^2)，与平面接触产生变形后，其最后压力为 10.364psi。

表 4 粘弹性滚动体的滚动阻力

法向力	阻力矩	接地中心位移	旋转速度，r/s
121	−10.8	−0.055	0.1
131	−15.8	−0.087	0.2
142	−17.9	−0.104	0.3
152	−18.68	−0.114	0.4
160	−18.76	−0.119	0.5
167	−18.52	−0.121	0.6
173	−18.14	−0.121	0.7
178	−17.66	−0.119	0.8
183	−17.14	−0.117	0.9
187	−16.59	−0.115	1
117	−0.01	0.0	0.0001
215	−0.03	−0.0002	1000

注：外半径 2，内半径 0.5，近似速度 1.9，Neo-Hookean 瞬时工况，a，$V=0.1$，$\gamma=0.5$。

图 7 与刚性面无摩擦接触的常压环形轮廓

轮胎模拟

本文所讨论的有限元方法主要用于分析特定加载条件下轮胎结构的大变形。我们选用标准的 P195/70R14 NTMP 轿车胎作为研究对象。这种轮胎是固特里奇公司制造的，其材料数据和实验结果是非常精确可靠的。轮胎的初始几何形状和有限元网格如图 8，9

所示。轮胎截面上胎体和带束层由一组各向异性厚壳单元表示，胎面则由各向同性的砖块(brick)单元表示。NTMP 轮胎详细的材料参数可从尤尼罗伊尔-固特里奇轮胎公司获得[10]。应强调，由于带束层钢丝的斜交方向，轮胎的两半是非对称的，而且若只在数值上模拟半边轮胎，则须外加一定的非对称条件[1]。

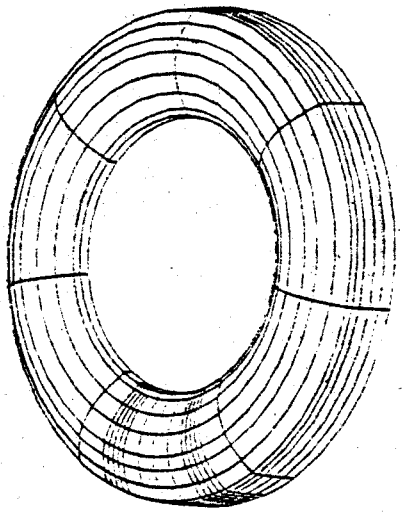


图 8　NTMP 轿车胎的有限元网格

第一个实例是解决有关轮胎的充气及与刚性面无摩擦接触等方面的问题，求解这些问题通常使用两种基本有限元模型：

(1)在适当的平面上满足对称条件的 1/4 轮胎模型。这种模型计算上较容易，但不能精确表示带束层非对称及各向异性结构。

(2)如图 8 所示的 1/2 轮胎模型具有非对称边界条件，这种模型逼真地反映了轮胎的各向异性结构。由于是 1/2 轮胎模型并且采用非对称边界条件相应较大的带宽，从而使得 1/4 对称情形的计算更为复杂(但它仍比全轮胎模型要简单)。

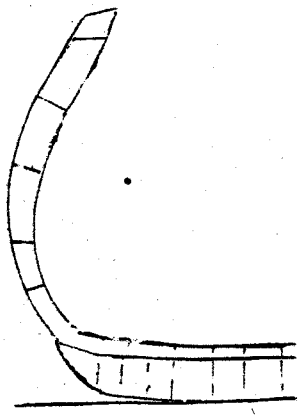
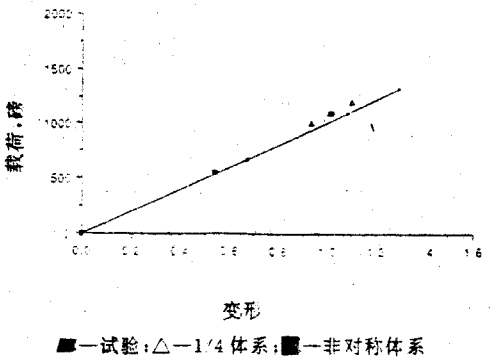


图 9　NTMP 测试胎未变形断面

图 10 所示的两种模型的载荷-变形曲线，可见其差别是较小的。如图 11 所示印痕区变形后的轮胎截面，这是充气压力为 29psi 和法向负荷为 1100 P 所对应的结果。应指出，上节中所得的法向力条件在此处分析中同样适用。



■—试验；△—1/4 体系；■—非对称体系

图 10　法向负荷作用下 NTMP 轮胎的载荷-变形曲线

印痕区的形状是该解答的最重要的特征之一，NTMP 轮胎在法向负荷为 1100 P 作用下的印痕如图 12 所示，这表明由于带束层

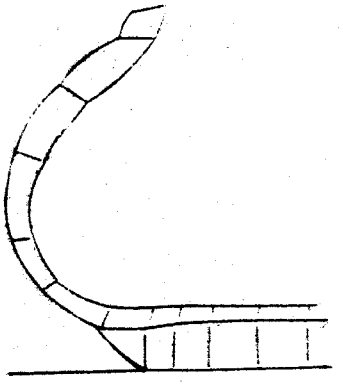


图 11　法向载荷为 1100 P 时 NTMP 轮胎的断面

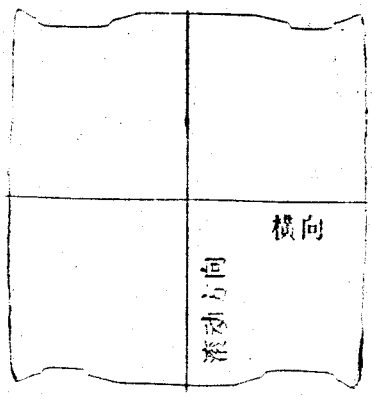


图 12 无摩擦非对称的 NTMP 轮胎印痕

的特殊结构，印痕是非对称的而不是对称的。印痕全长为 5.54 英寸，宽为 5.30 英寸。

也可用在计算上较简单的 1/4 对称条件来分析 NTMP 轮胎的印痕形状和接地压力等值线，如图 13 所示。可以看出，虽然 1/4 对称模型不够真实，但其结果与非对称解答并无太大差别(其长为 5.67 英寸，宽为 5.30 英寸)。

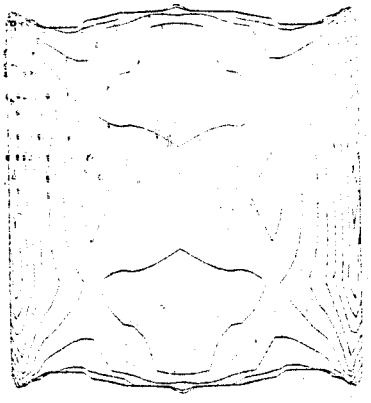


图 13 1/4 对称和无摩擦 NTMP 轮胎的印痕及接触压力等值线

在计算中应考虑的其它情况包括轮胎的气密性和与刚性地面有摩擦的静态接触。摩擦系数为 0.51，从接触面下方看轮胎的变形轮廓如图 14 所示。在非对称条件下所得的印痕如图 15 所示。可以看出与无摩擦解相比，整个印痕变化虽然不大，但尺寸还是有所不同：长为 5.51 英寸，宽为 5.36 英寸。这些结果均与 Pottinger 所得实验数据吻合得很好。

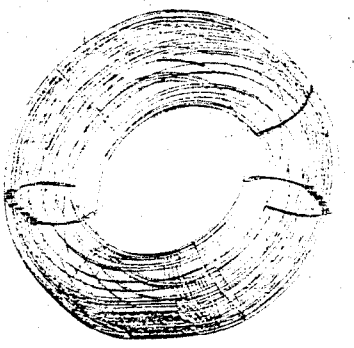


图 14 刚性平面接触的 NTMP 轮胎变形轮廓(阴影部分为印痕)

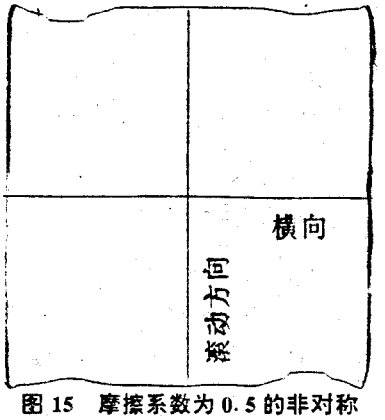


图 15 摩擦系数为 0.5 的非对称 NTMP 轮胎印痕

小结

本文回顾了三维公式在类似轮胎结构静态和稳态滚动中的应用，这种模型包括了在大位移、大应变、大转动下的旋转、转弯、接触摩擦、气密性及外力矩对物体的作用效果。而且将超弹性材料特性推广到包括以内部状态变量公式为基础的粘弹性材料模型。从模型各方面证明的几个实例表明了所得实验和理论结果定性上是一致的。

译自《Tire Science and Technology》，20[1]，33～56(1992)